Cours sur les homothéties.

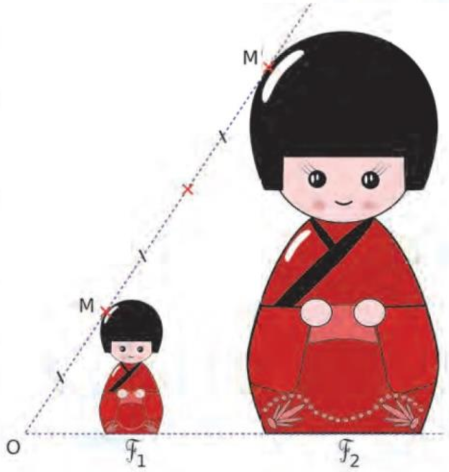
Cours

1 Homothétie

A Introduction

- La figure $\mathcal{F}_2$ est un **agrandissement** de rapport 3 de la figure $\mathcal{F}_1$.
  On dit que la figure $\mathcal{F}_2$ est l'image de la figure $\mathcal{F}_1$ par l'**homothétie** de centre O et de rapport 3.
- La figure $\mathcal{F}_1$ est une **réduction** de rapport $\frac{1}{3}$ de la figure $\mathcal{F}_2$.

  On dit que la figure $\mathcal{F}_1$ est l'image de la figure $\mathcal{F}_2$ par l'**homothétie** de centre O et de rapport $\frac{1}{3}$.



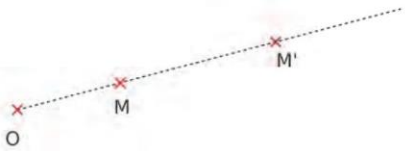
B Image d'un point

Définition

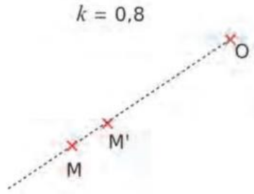
L'image d'un point M par l'homothétie de centre O et de rapport k positif est le point M' tel que :
- M' appartient à [OM) ;
- OM' = $k \times$ OM.

Exemples :

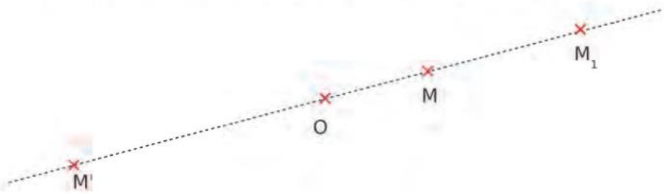
$k = 2,5$



$k = 0,8$



Remarque :
Dans le cas où k est négatif, par exemple $k = -2,5$, on construit l'image M_1 de M par l'homothétie de rapport 2,5 puis on construit le symétrique M' de M_1 par rapport à O.



Cours

C Image d'un segment

Propriété Soient A, B et O trois points, et k un nombre positif.

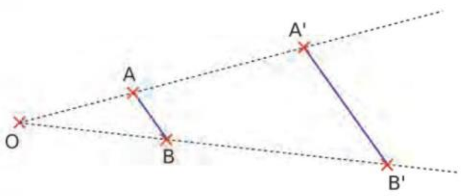
Si les points A' et B' sont les images respectives des points A et B par l'homothétie de centre O et de rapport k, alors :

- $A'B' = k \times AB$;
- les segments [AB] et [A'B'] sont parallèles.

Démonstration :

Soient A' et B' les images respectives des points A et B par une homothétie de centre O et de rapport k.

- On a $\dfrac{OA'}{OA} = \dfrac{OB'}{OB} = k$ donc, d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (AB) et (A'B') sont parallèles.
- On peut donc appliquer le **théorème de Thalès** dans les triangles OAB et OA'B' et on obtient : $\dfrac{A'B'}{AB} = k$.



D Propriétés de l'homothétie

Propriétés

L'homothétie **conserve** l'**alignement**, les **milieux** et la **mesure des angles**.

Dans une homothétie de rapport k positif :

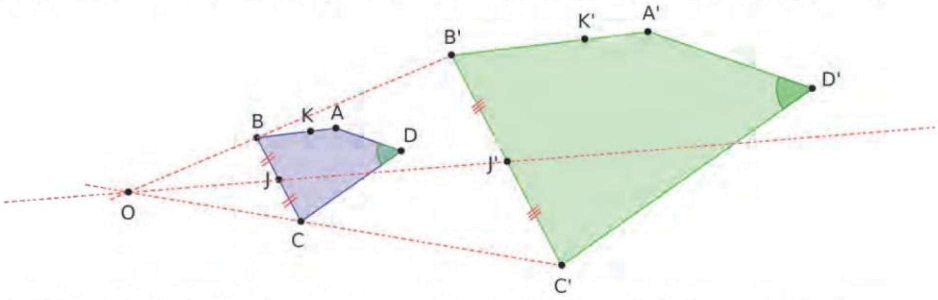
- les **longueurs** sont multipliées par k ;
- les **aires** sont multipliées par k^2.

La figure $\mathcal{F}_2$ est l'image de la figure $\mathcal{F}_1$ par cette homothétie :

- si $k > 1$, alors $\mathcal{F}_2$ est un **agrandissement** de $\mathcal{F}_1$;
- si $0 < k < 1$, alors $\mathcal{F}_2$ est une **réduction** de $\mathcal{F}_1$.

Exemple :

Le quadrilatère A'B'C'D' est l'image de ABCD par l'homothétie de centre O et de rapport 2,5.



- Les points A, B, K sont alignés, donc leurs images respectives A', B', K' sont également alignées.
- Le point J est le milieu du segment [BC], donc son image J' est le milieu du segment [B'C'].
- L'angle $\widehat{A'D'C'}$ est l'image de l'angle $\widehat{ADC}$, ils ont donc la même mesure.
- Les longueurs sont multipliées par 2,5. Exemple : $C'D' = 2,5 \times CD$
- Les aires sont multipliées par $2,5^2$ soit 6,25. Exemple : $\text{Aire}(A'B'C'D') = 6,25 \times \text{Aire}(ABCD)$

Cours

2 Triangles semblables

A Définition

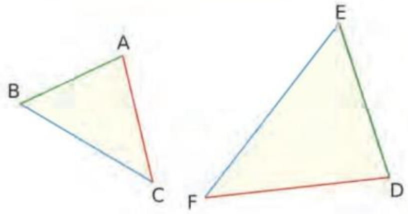
Définition Deux triangles sont **semblables** si les longueurs de leurs côtés sont proportionnelles.

Exemple : Les triangles ABC et DEF sont semblables.

Le tableau suivant est un tableau de proportionnalité.

Triangle ABC	AB	AC	BC
Triangle DEF	DE	DF	EF

Donc $\frac{DE}{AB} = \frac{DF}{AC} = \frac{EF}{BC}$.



Remarque :
Si deux triangles sont homothétiques (c'est-à-dire si l'un est l'image de l'autre par une homothétie), alors ils sont semblables.

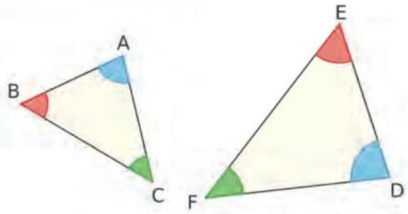
B Propriétés

Propriété 1 **Si** deux triangles sont semblables, **alors** leurs angles ont la même mesure deux à deux.

Exemple : On reprend les triangles précédents.

Triangle ABC	$\widehat{ACB}$ opposé à [AB]	$\widehat{ABC}$ opposé à [AC]	$\widehat{BAC}$ opposé à [BC]
Triangle DEF	$\widehat{DFE}$ opposé à [DE]	$\widehat{FED}$ opposé à [DF]	$\widehat{FDE}$ opposé à [EF]

Les angles opposés aux côtés proportionnels ont la même mesure : $\widehat{ACB} = \widehat{DFE}$; $\widehat{ABC} = \widehat{FED}$ et $\widehat{BAC} = \widehat{FDE}$.



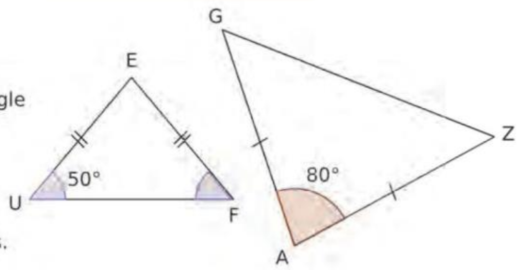
Propriété 2
Si deux triangles ont leurs angles de même mesure deux à deux, **alors** ils sont semblables.

Exemple :
Le triangle FEU est isocèle en E,
donc $\widehat{EFU} = \widehat{EUF} = 50°$.

La somme des mesures des angles d'un triangle est 180°, donc $\widehat{FEU} = 180° - 2 \times 50° = 80°$.

GAZ est un triangle isocèle en A,
donc $\widehat{AGZ} = \widehat{AZG} = (180° - 80°) \div 2 = 50°$.

Les deux triangles ont leurs angles de même mesure 2 à 2, ils sont donc semblables.



Remarques :
- Cette propriété est la réciproque de la précédente.
- Deux triangles équilatéraux sont semblables.