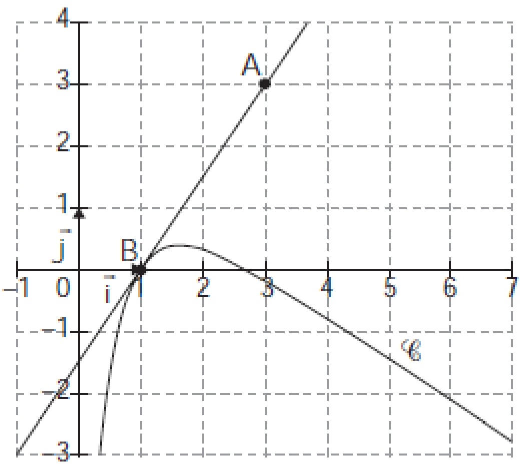
Exercices sur bac de maths 2024 .

Exercice 1 : nombre dérivé et tangente à la courbe.

La courbe $\mathscr{C}$ donnée ci-après est la représentation graphique d'une fonction h définie et dérivable sur l'intervalle $]0\ ;+\infty[$. La droite (AB), tracée sur le graphique, est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point B d'abscisse 1.



On note h' la fonction dérivée de la fonction h sur l'intervalle $]0\ ;+\infty[$.

a) $h'(1) = 0$ **b)** $h'(1) = 1,5$ **c)** $h'(1) = -\dfrac{2}{3}$

Exercice 2 : tableau de variation et fonction exponentielle.

Soit f une fonction définie sur $]-\infty\,;\ 0[\ \cdot\ ]0\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = 2x + 1 + \dfrac{e^x}{e^x - 1}$. On admet que la fonction f' est dérivable sur $]-\infty\,;\,0[\cdot]0\,;\,+\infty[$.

On désigne par $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal.

Le tableau de variations de la fonction f est donné ci-dessous.

x	$-\infty$	$-\ln 2$	0	$\ln 2$	$+\infty$
Variation de f	$-\infty$ $\nearrow$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$ $2\ln 2 + 3$ $\nearrow$	$+\infty$

La tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $\ln(1{,}5)$ admet un coefficient directeur :

a) strictement positif ***b)*** strictement négatif ***c)*** nul

Exercice 3 : dérivée d'une fonction exponentielle.

La fonction f est définie et dérivable sur l'ensemble des nombres réels R par $f(x) = e^{-2x+1}$.

On note f' sa fonction dérivée.

a) Pour tout x de R, $f'(x) = e^{-2}$.

b) Pour tout x de R, $f'(x) = e^{-2x+1}$.

c) Pour tout x de R, $f'(x) = -2e^{-2x+1}$.

Exercice 4 : dérivée d'une fonction exponentielle.

On donne la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = x\ln x$.

La dérivée de f est définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

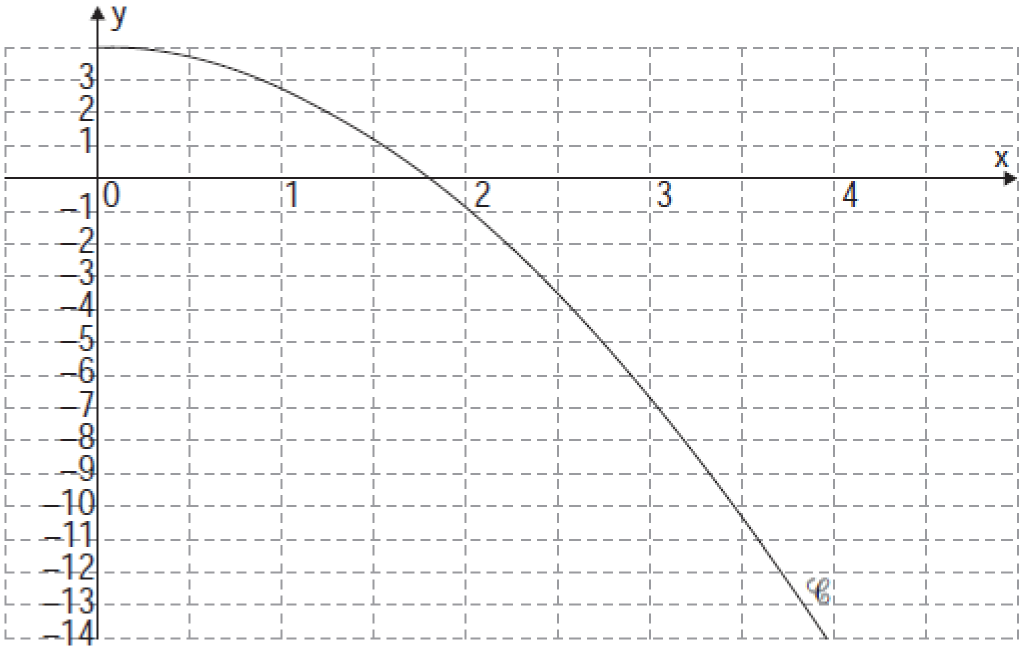
a) $f'(x) = 1$ ***b)*** $f'(x) = \ln x$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ ***d)*** $f'(x) = \ln(x) + 1$

Exercice 5 : courbe de la fonction dérivée.

Soit f la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ 4]$ par $f(x) = -x^2 - x + 4 + \ln(x + 1)$.

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans le repère orthogonal ci-dessous et f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $[0\ ;\ 4]$.



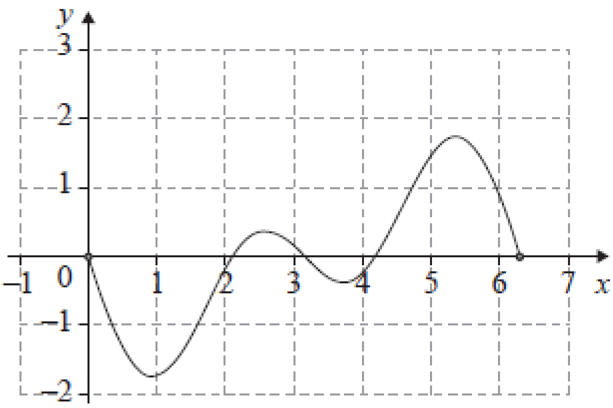
a) Calculer $f'(x)$.

b) Justifier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ 4]$.

Exercice 6 : fonction cosinus et dérivée.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 2\pi]$ par : $f(x) = \cos x + \frac{1}{2}\cos(2x) + 1$.

La courbe préconstruite ci-dessous est la représentation graphique de la fonction dérivée f' sur l'intervalle $[0 ; 2\pi]$.



1. ***a)*** Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f.

b) En utilisant la relation $\sin(2a) = 2\sin a \cos a$, montrer que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0 ; 2\pi]$: $f'(x) = -\sin(x)\,[1 + 2\cos(x)]$.

2. Résoudre dans l'intervalle $[0 ; 2\pi]$, l'équation produit : $\sin(x)\,[1 + 2\cos(x)] = 0$.

3. ***a)*** En s'appuyant sur la représentation graphique de la fonction dérivée f' ci-dessus, dresser le tableau de signes de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0 ; 2\pi]$.

Exercice 7 : fonctions exponentielles et limites.

Étant donné un nombre réel k, on considère la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}$ par $f_k(x) = \frac{1}{1+e^{-kx}}$.
Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$.

Partie A

Dans cette partie on choisit $k = 1$.
On a donc, pour tout réel x, $f_1(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}$.
La représentation graphique $\mathscr{C}_1$ de la fonction f_1 dans le repère $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$ est donnée en annexe.

1. Déterminer les limites de $f_1(x)$ en $+\infty$ et en $-\infty$ et interpréter graphiquement les résultats obtenus.

2. Démontrer que, pour tout réel x, $f_1(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$.

3. On appelle f'_1 la fonction dérivée de f_1 sur $\mathbb{R}$. Calculer, pour tout réel x, $f'_1(x)$.
En déduire les variations de la fonction f_1 sur $\mathbb{R}$.

4. On définit le nombre $I = \int_0^1 f_1(x)\,dx$.
Montrer que $I = \ln\left(\frac{1+e}{2}\right)$.
Donner une interprétation graphique de I.

Exercice 8 : tableau de variation et équation.

On considère la fonction f définie pour tout nombre réel x de l'intervalle [1 ; 10] par $f(x) = -x\ln x + 2x$.

1. Montrer que la fonction dérivée f' de la fonction f est définie pour tout nombre réel x de l'intervalle [1 ; 10] par : $f'(x) = -\ln x + 1$.

2. *a)* Étudier le signe de $f'(x)$ en fonction des valeurs du nombre réel x de l'intervalle [1 ; 10].

b) En déduire le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle [1 ; 10].

3. On appelle $\mathscr{C}$ la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthonormé du plan (unités : 1 cm en abscisses, 1 cm en ordonnées). Représenter graphiquement $\mathscr{C}$ dans ce repère.

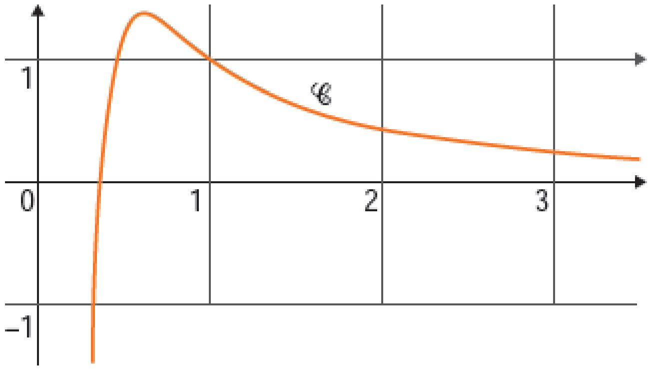
4. On considère l'équation (E) : $f(x) = 0$, sur l'intervalle [1 ; 10].

a) Déterminer le nombre de solutions de l'équation (E).

b) Pour chacune des solutions trouvées, donner une valeur approchée à 10^{-2} près.

Exercice 9 : une étude de limite et variations d'une fonction.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1+\ln x}{x^2}$ et soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère du plan. La courbe $\mathscr{C}$ est donnée ci-dessous :



1. ***a)*** Étudier la limite de f en 0.

b) Que vaut $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}$? En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.

c) En déduire les asymptotes éventuelles à la courbe $\mathscr{C}$.

2. ***a)*** On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;+\infty[$.
Démontrer que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$,
$f'(x)=\dfrac{-1-2\ln x}{x^3}$.

b) Résoudre sur l'intervalle $]0\ ;+\infty[$ l'inéquation $-1-2\ln x>0$.
En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0\ ;+\infty[$.

c) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

3. ***a)*** Démontrer que la courbe $\mathscr{C}$ a un unique point d'intersection avec l'axe des abscisses, dont on précisera les coordonnées.

b) En déduire le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $]0\ ;+\infty[$.

Exercice 10 : intégrale d'une fonction et exponentielle.

On considère la suite u_n définie pour tout entier naturel n par : $u_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}}dx$.

1. ***a)*** Montrer que $u_0 + u_1 = 1$.

b) Calculer u_1. En déduire u_0.

2. Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 0$.

3. ***a)*** Montrer que pour tout entier naturel n non nul :

$u_{n+1} + u_n = \frac{1-e^{-n}}{n}$.

b) En déduire que pour tout entier naturel n non nul : $u_n \leqslant \frac{1-e^{-n}}{n}$.

4. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice 11 : nombres complexes et forme algébrique.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On note i le nombre complexe tel que $i^2 = -1$. On considère le point A d'affixe $Z_A = 1$ et le point B d'affixe $Z_B = i$. À tout point M d'affixe $Z_M = x + iy$, avec x et y deux réels tels que $y \neq 0$, on associe le point M′ d'affixe $Z_{M'} = -iZ_M$. On désigne par I le milieu du segment [AM]. Le but de l'exercice est de montrer que, pour tout point M n'appartenant pas à (OA), la médiane (OI) du triangle OAM est aussi une hauteur du triangle OBM′ (propriété 1) et que BM′ = 2 OI (propriété 2).

1. Dans cette question, et uniquement dans cette question, on prend $Z_M = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

a) Déterminer la forme algébrique de $Z_{M'}$.

b) Montrer que $Z_{M'} = -\sqrt{3} - i$. Déterminer le module et un argument de $Z_{M'}$.

c) Placer les points A, B, M, M′ et I dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ en prenant 2 cm pour unité graphique.

Tracer la droite (OI) et vérifier rapidement les propriétés 1 et 2 à l'aide du graphique.

Exercice 12 : représentation géométrique d'un nombre complexe.

Indiquer si les affirmations sont vraies ou fausses, en justifiant la réponse. Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A, B, C, D et E d'affixes respectives :

$a = 2 + 2i$; $b = -\sqrt{3} + i$; $c = 1 + i\sqrt{3}$; $d = -1 + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ et $e = -1 + (2 + \sqrt{3})i$.

1. Affirmation 1 : les points A, B et C sont alignés.

2. Affirmation 2 : les points B, C et D appartiennent à un même cercle de centre E.

Exercice 13 : forme exponentielle d'un nombre complexe.

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Aucune justification n'est demandée. Pour chacune des questions, une seule des quatre propositions est exacte.

1. Soit $z_1 = \sqrt{6}e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $z_2 = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{3}}$. La forme exponentielle de $i\frac{z_1}{z_2}$ est :

a) $\sqrt{3}e^{i\frac{19\pi}{12}}$ *b)* $\sqrt{12}e^{-i\frac{\pi}{12}}$ *c)* $\sqrt{3}e^{i\frac{7\pi}{12}}$ *d)* $\sqrt{3}e^{i\frac{13\pi}{12}}$

2. L'équation $-z = \overline{z}$, d'inconnue complexe z, admet :

a) une solution *b)* deux solutions

c) une infinité de solutions dont les points images dans le plan complexe sont situés sur une droite.

d) une infinité de solutions dont les points images dans le plan complexe sont situés sur un cercle.

Exercice 14 : droites et équation d'un plan.

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé.
On considère les points A(0 ; 4 ; 1), B (1 ; 3 ; 0), C(2 ; – 1 ; – 2) et D (7 ; – 1 ; 4).

1. Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

2. Soit Δ la droite passant par le point D et de vecteur directeur $\vec{u}(2\,;-1\,;3)$.

a) Démontrer que la droite Δ est orthogonale au plan (ABC).

b) En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).

c) Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ.

d) Déterminer les coordonnées du point H, intersection de la droite Δ et du plan (ABC).

3. Soit $\mathcal{P}_1$ le plan d'équation $x + y + z = 0$ et $\mathcal{P}_2$ le plan d'équation $x + 4y + 2 = 0$.

a) Démontrer que les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants.

b) Vérifier que la droite d, intersection des plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$, a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = -4t - 2 \\ y = t \\ z = 3t + 2 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

c) La droite d et le plan (ABC) sont-ils sécants ou parallèles ?

Exercice 15 : représentation paramétrique d'un plan.

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O ; \vec{i} ; \vec{j} ; \vec{k})$.

Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation $3x + y - z - 1 = 0$ et $\mathcal{D}$ la droite dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x = -t + 1 \\ y = 2t \\ z = -t + 2 \end{cases}$

où t désigne un nombre réel.

1. ***a)*** Le point $C(1 ; 3 ; 2)$ appartient-il au plan $\mathcal{P}$? Justifier.

b) Démontrer que la droite $\mathcal{D}$ est incluse dans le plan $\mathcal{P}$.

2. Soit Q le plan passant par le point C et orthogonal à la droite $\mathcal{D}$.

a) Déterminer une équation cartésienne du plan Q.

b) Calculer les coordonnées du point I, point d'intersection du plan Q et de la droite $\mathcal{D}$.

c) Montrer que $CI = \sqrt{3}$.

3. Soit t un nombre réel et M_t le point de la droite $\mathcal{D}$ de coordonnées $(-t + 1 ; 2t ; -t + 2)$.

a) Vérifier que, pour tout nombre réel t, $CM_t^2 = 6t^2 - 12t + 9$.

b) Montrer que CI est la valeur minimale de CM_t lorsque t décrit l'ensemble des nombres réels.

Exercice 16 : probabilités et jardinerie.

Une jardinerie vend de jeunes plants d'arbres qui proviennent de trois horticulteurs : 35 % des plants proviennent de l'horticulteur H_1, 25 % de l'horticulteur H_2 et le reste de l'horticulteur H_3. Chaque horticulteur livre deux catégories d'arbres : des conifères et des feuillus. La livraison de l'horticulteur H_1 comporte 80 % de conifères, alors que celle de l'horticulteur H_2 n'en comporte que 50 % et celle de l'horticulteur H_3 seulement 30 %.

1. Le gérant de la jardinerie choisit un arbre au hasard dans son stock.
On envisage les événements suivants :

H_1 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_1 » ;

H_2 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_2 » ;

H_3 : « l'arbre choisi a été acheté chez l'horticulteur H_3 » ;

C : « l'arbre choisi est un conifère » ;

F : « l'arbre choisi est un feuillu ».

a) Construire un arbre pondéré traduisant la situation.

b) Calculer la probabilité que l'arbre choisi soit un conifère acheté chez l'horticulteur H_3.

c) Justifier que la probabilité de l'événement C est égale à 0,525.

d) L'arbre choisi est un conifère. Quelle est la probabilité qu'il ait été acheté chez l'horticulteur H_1 ? (On arrondira à 10^{-3}.)

Exercice 17 : algorithme et suites numériques.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{2u_n}$.

1. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	n est un entier naturel
	u est un réel positif
Initialisation :	Demander la valeur de n
	Affecter à u la valeur 1
Traitement :	Pour i variant de 1 à n :
	Affecter à u la valeur $\sqrt{2u}$
	Fin de Pour
Sortie :	Afficher u

a) Donner une valeur approchée à 10^{-4} près du résultat qu'affiche cet algorithme lorsque l'on choisit $n = 3$.

b) Que permet de calculer cet algorithme ?

c) Le tableau ci-dessous donne des valeurs approchées obtenues à l'aide de cet algorithme pour certaines valeurs de n.

n	1	5	10	15	20
Valeur affichée	1,4142	1,9571	1,9986	1,9999	1,9999

Quelles conjectures peut-on émettre concernant la suite (u_n) ?

Exercice 18 : annale sur les suites numériques.

Soit la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1$.

1. *a)* Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4. On pourra en donner des valeurs approchées à 10^{-2} près.

b) Formuler une conjecture sur le sens de variation de cette suite.

2. *a)* Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant n + 3$.

b) Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(n + 3 - u_n)$.

c) En déduire une validation de la conjecture précédente.

3. On désigne par (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - n$.

a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$.

b) En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n = 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n + n$.

c) Déterminer la limite de la suite (u_n).

4. Pour tout entier naturel non nul n, on pose : $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$ et $T_n = \frac{S_n}{n^2}$.

a) Exprimer S_n en fonction de n.

b) Déterminer la limite de la suite (T_n).

Exercice 19 : suites récurrentes.

On considère la suite de nombres réels (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = -1$, $u_1 = \frac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$.

1. Calculer u_2 et en déduire que la suite (u_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.

2. On définit la suite (v_n) en posant, pour tout entier naturel n : $v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$.

a) Calculer v_0.

b) Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.

c) En déduire que la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

d) Exprimer v_n en fonction de n.

3. On définit la suite (w_n) en posant, pour tout entier naturel n : $w_n = \frac{u_n}{v_n}$.

a) Calculer w_0.

b) En utilisant l'égalité $u_{n+1} = v_n + \frac{1}{2}u_n$, exprimer w_{n+1} en fonction de u_n et de v_n.

c) En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}$, $w_{n+1} = w_n + 2$.

d) Exprimer w_n en fonction de n.

4. Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{2n-1}{2^n}$.

5. Pour tout entier naturel n, on pose : $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$.

Démontrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$: $S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}$.

Exercice 20 : une équation de la tangente à une courbe.

Une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction exponentielle au point d'abscisse 0 est :

a) $y = x + 1$ *b)* $y = ex$ *c)* $y = e^x$

Exercice 21 : tangente à la courbe en un point.

Soit f la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = 3\ln x - 2x + 5$. Dans le plan muni d'un repère, la tangente à la courbe représentative de la fonction f en son point d'abscisse 1 admet pour équation :

a) $y = x + 2$ *b)* $y = -x + 4$ *c)* $y = 3x + 1$ *d)* $y = x + 3$

Exercice 22 : fonction exponentielle.

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point. Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Soit f la fonction définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{e^{2x}}{x}.$$

On donne l'expression de la dérivée seconde f''de f, définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$f''(x) = \frac{2\,e^{2x}\,(2x^2-2x+1)}{x^3}.$$

1. La fonction f', dérivée de f, est définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :

a. $f'(x) = 2e^{2x}$

b. $f'(x) = \frac{e^{2x}(x-1)}{x^2}$

c. $f'(x) = \frac{e^{2x}(2x-1)}{x^2}$

d. $f'(x) = \frac{e^{2x}(1+2x)}{x^2}$

2. La fonction f :

a. est décroissante sur $]0\,;+\infty[$

b. est monotone sur $]0\,;+\infty[$

c. admet un minimum en $\frac{1}{2}$

d. admet un maximum en $\frac{1}{2}$

3. La fonction f admet pour limite en $+\infty$:

a. $+\infty$ **b.** 0 **c.** 1 **d.** e^{2x}

4. La fonction f :

a. est concave sur $]0\,;+\infty[$

b. est convexe sur $]0\,;+\infty[$

c. est concave sur $]0\,;\frac{1}{2}]$

d. est représentée par une courbe admettant un point d'inflexion

Exercice 23 : probabilités et chaîne de fabrication.

Une chaîne de fabrication produit des pièces mécaniques. On estime que 5 % des pièces produites par cette chaîne sont défectueuses.

Un ingénieur a mis au point un test à appliquer aux pièces. Ce test a deux résultats possibles : « positif » ou bien « négatif ».

On applique ce test à une pièce choisie au hasard dans la production de la chaîne.

On note $p(E)$ la probabilité d'un événement E.

On considère les événements suivants :

- D : « la pièce est défectueuse » ;
- T : « la pièce présente un test positif » ;
- $\overline{D}$ et $\overline{T}$ désignent respectivement les évènements contraires de D et T.

Compte tenu des caractéristiques du test, on sait que :

- La probabilité qu'une pièce présente un test positif sachant qu'elle défectueuse est égale à 0,98 ;
- La probabilité qu'une pièce présente un test négatif sachant qu'elle n'est pas défectueuse est égale à 0,97.

Les parties I et II peuvent être traitées de façon indépendante.

PARTIE I

1. Traduire la situation à l'aide d'un arbre pondéré.
2. **a.** Déterminer la probabilité qu'une pièce choisie au hasard dans la production de la chaîne soit défectueuse et présente un test positif.
   b. Démontrer que : $p(T) = 0{,}0775$.
3. On appelle ***valeur prédictive positive*** du test la probabilité qu'une pièce soit défectueuse sachant que le test est positif. On considère que pour être efficace, un test doit avoir une valeur prédictive positive supérieure à 0,95.
   Calculer la valeur prédictive positive de ce test et préciser s'il est efficace.

PARTIE II

On choisit un échantillon de 20 pièces dans la production de la chaîne, en assimilant ce choix à un tirage avec remise. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de pièces défectueuses dans cet échantillon.
On rappelle que : $p(D) = 0{,}05$.

1. Justifier que X suit une loi binomiale et déterminer les paramètres de cette loi.
2. Calculer la probabilité que cet échantillon contienne au moins une pièce défectueuse. On donnera un résultat arrondi au centième.
3. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X et interpréter le résultat obtenu.

Exercice 24 : suites et desserts.

Cécile a invité des amis à déjeuner sur sa terrasse. Elle a prévu en dessert un assortiment de gâteaux individuels qu'elle a achetés surgelés.

Elle sort les gâteaux du congélateur à -19 °C et les apporte sur la terrasse où la température ambiante est de 25 °C.

Au bout de 10 minutes la température des gâteaux est de $1{,}3$ °C.

I - Premier modèle

On suppose que la vitesse de décongélation est constante, c'est-à-dire que l'augmentation de la température des gâteaux est la même minute après minute.

Selon ce modèle, déterminer quelle serait la température des gâteaux 25 minutes après leur sortie du congélateur.

Ce modèle semble-t-il pertinent ?

II - Second modèle

On note T_n la température des gâteaux, en degré Celsius, au bout de n minutes après leur sortie du congélateur ; ainsi $T_0 = -19$.

On admet que pour modéliser l'évolution de la température, on doit avoir la relation suivante :
pour tout entier naturel n, $T_{n+1} - T_n = -0{,}06 \times (T_n - 25)$.

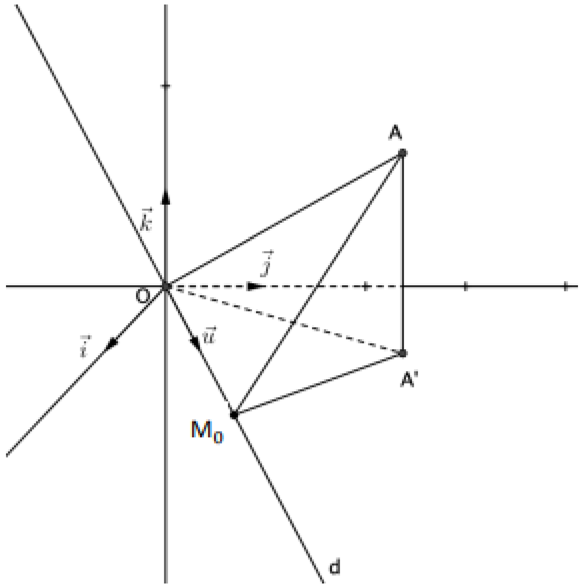
1. Justifier que, pour tout entier naturel n, on a : $T_{n+1} = 0{,}94T_n + 1{,}5$.
2. Calculer T_1 et T_2. On donnera des valeurs arrondies au dixième.
3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $T_n \leq 25$.
En revenant à la situation étudiée, ce résultat était-il prévisible ?
4. Étudier le sens de variation de la suite (T_n).
5. Démontrer que la suite (T_n) est convergente.
6. On pose, pour tout entier naturel n, $U_n = T_n - 25$.
a. Montrer que la suite (U_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme U_0.
b. En déduire que pour tout entier naturel n, $T_n = -44 \times 0{,}94^n + 25$.
c. En déduire la limite de la suite (T_n). Interpréter ce résultat dans le contexte de la situation étudiée.
7. **a.** Le fabricant conseille de consommer les gâteaux au bout d'une demi-heure à température ambiante après leur sortie du congélateur. Quelle est alors la température atteinte par les gâteaux ? On donnera une valeur arrondie à l'entier le plus proche.

b. Cécile est une habituée de ces gâteaux, qu'elle aime déguster lorsqu'ils sont encore frais, à la température de 10 °C. Donner un encadrement entre deux entiers consécutifs du temps en minutes après lequel Cécile doit déguster son gâteau.

Exercice 25 : représentation paramétrique et volume.

Principaux domaines abordés :

Géométrie de l'espace rapporté à un repère orthonormé ; orthogonalité dans l'espace.



Dans un repère orthonormé $(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on considère :

- le point A de coordonnées $(1 ; 3 ; 2)$,
- le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$,
- la droite d passant par l'origine O du repère et admettant pour vecteur directeur $\vec{u}$.

Le but de cet exercice est de déterminer le point de d le plus proche du point A et d'étudier quelques propriétés de ce point.

On pourra s'appuyer sur la figure ci-contre pour raisonner au fur et à mesure des questions.

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d.

2. Soit t un nombre réel quelconque, et M un point de la droite d, le point M ayant pour coordonnées $(t ; t ; 0)$.

a. On note AM la distance entre les points A et M. Démontrer que :

$$AM^2 = 2t^2 - 8t + 14\,.$$

b. Démontrer que le point M_0 de coordonnées $(2 ; 2 ; 0)$ est le point de la droite d pour lequel la distance AM est minimale. On admettra que la distance AM est minimale lorsque son carré AM^2 est minimal.

3. Démontrer que les droites (AM_0) et d sont orthogonales.

4. On appelle A' le projeté orthogonal du point A sur le plan d'équation cartésienne $z = 0$. Le point A' admet donc pour coordonnées $(1 ; 3 ; 0)$.
Démontrer que le point M_0 est le point du plan $(AA'M_0)$ le plus proche du point O, origine du repère.

5. Calculer le volume de la pyramide $OM_0A'A$.
On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par : $V = \frac{1}{3}\mathcal{B}h$, où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base et h est la hauteur de la pyramide correspondant à cette base.

Exercice 26 : fonction exponentielle et équation différentielle.

Exercice 27 : représentation paramétrique.

Exercice 28 : suite récurrente.

Exercice 29 : logarithme népérien et fonctions.

Principaux domaines abordés :

Fonction logarithme ; dérivation.

Partie I

On désigne par h la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$h(x) = 1 + \frac{\ln(x)}{x^2}.$$

On admet que la fonction h est dérivable sur $]0;+\infty[$ et on note h' sa fonction dérivée.

1. Déterminez les limites de h en 0 et en $+\infty$.

2. Montrer que, pour tout nombre réel x de $]0;+\infty[$, $h'(x) = \frac{1-2\ln(x)}{x^3}$.

3. En déduire les variations de la fonction h sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

4. Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α appartenant à $]0;+\infty[$ et vérifier que : $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.

5. Déterminer le signe de $h(x)$ pour x appartenant à $]0;+\infty[$.

Partie II

On désigne par f_1 et f_2 les fonctions définies sur $]0;+\infty[$ par :

$$f_1(x) = x - 1 - \frac{\ln(x)}{x^2} \quad \text{et} \quad f_2(x) = x - 2 - \frac{2\ln(x)}{x^2} \; .$$

On note $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ les représentations graphiques respectives de f_1 et f_2 dans un repère $(O\,;\,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1. Montrer que, pour tout nombre réel x appartenant à $]0;+\infty[$, on a :

$$f_1(x) - f_2(x) = h(x).$$

2. Déduire des résultats de la **Partie I** la position relative des courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$. On justifiera que leur unique point d'intersection a pour coordonnées $(\alpha;\alpha)$.
On rappelle que α est l'unique solution de l'équation $h(x) = 0$.

Exercice 30 : convexité et étude d'une fonction.