Exercices sur arithmétique .

Exercice 1 : fractions irréductibles.

Utiliser les décompositions en facteurs premiers suivantes pour rendre ces fractions irréductibles.

$504 = 2^3 \times 3^2 \times 7 ; 13500 = 2^2 \times 3^3 \times 5^3$

$4400 = 2^4 \times 5^2 \times 11 ; 11466 = 2 \times 3^2 \times 7^2 \times 13$

Rendre irréductibles les fractions suivantes :

$\frac{504}{4400} ; \frac{504}{11466} ; \frac{13500}{504} .$

Exercice 2 : rendre des fractions irréductibles.

Rendre irréductible les fractions suivantes :

$\frac{8800}{1638} ; \frac{64}{4400} ; \frac{1260}{1638} ; \frac{1638}{810} .$

Exercice 3 : paquets de billes et arithmétique.

Nori souhaite faire des paquets de billes,

en répartissant intégralement ses 90 billes rouges et 150 billes noires.

Le contenu de chaque paquet doit être identique.

1.Combien de paquets pourra-t-il réaliser?

Trouver les différentes possibilités.

2.Peut-il y avoir 9 paquets? 30 paquets?

3.Donner la liste des diviseurs de 90 puis de 150.

4.Quelles sont les différentes possibilités pour le nombre de paquets ?

Exercice 4 : somme et multiple : démonstration.

Démontrer que la somme de deux entiers positifs consécutifs et impairs est un multiple de 4.

Démontrer qu'un multiple de 8 est également un multiple de 4.

Exercice 5 : critères de divisibilité.

Compléter le tableau ci-dessous.

	Le nombre ci-dessous est divisible par...	2	3	4	5	9	10
a.	5 912						
b.	34 200						
c.	54 208						
d.	317						
e.	708						
f.		non	oui	non	non	non	non
g.		oui	oui	non	non	oui	non
h.		oui	oui	oui	oui	oui	oui
i.		non	non	non	non	non	non

Exercice 6 : liste des diviseurs d'un entier.

Ecrire la liste des diviseurs des nombres suivants :

16; 20; 36; 90; 59; 33.

Exercice 7 : activités d'un centre aéré.

Un centre aéré accueillant 131 enfants organise une journée "Sport Co"

avec du basket, du hand-ball, du football et du rugby.

Pour chaque sport, combien peut-on constituer d'équipes?

Combien d'enfants seront sans équipe ?

Exercice 8 : dividende, diviseur, quotient et reste.

Compléter le tableau suivant, sans poser les divisions,

puis écrire les égalités euclidiennes correspondantes.

Dividende	Diviseur	Quotient	Reste
	16	29	11
	23	432	21
456	41	11	
781	27	28	
935		55	0

Exercice 9 : décompositions en facteurs premiers.

Utiliser les égalités ci-dessous pour écrire les décompositions

en facteurs premiers des nombres proposés.

a. $36 = 4 \times 9 =$ ....

b. $18\,375 = 3 \times 125 \times 49 =$ ......

c. $3\,872 = 32 \times 121 =$ ....

d. $1\,183 = 91 \times 13 =$ ....

e. $214\,375 = 625 \times 343 =$ ....

Exercice 10 : décomposition en facteurs premiers.

Ecrire la décomposition en facteurs premiers

des nombres entiers suivants :

180; 63; 1 225; 3 672; 416; 24 000.

Exercice 11 : chercher un nombre.

Trouver le nombre recherché.

Je suis un nombre premier compris entre 100 et 150. La différence entre mon chiffre des unités et mon chiffre des centaines est le double de mon chiffre des dizaines.

Exercice 12 : donner la division euclidienne à l'aide de la calculatrice.

1. Parmi les égalités suivantes, donner la division euclidienne de 375 par 14 :

   a. $375 = 25\times14 + 25$ b. $375 = 26\times14 + 11$

   c. $375 = 27\times14 - 3$

2. Pour chaque question, à l'aide de la calculatrice, donner la division euclidienne de a par b :

a. $a = 370$; $b = 250$ b. $a = 315$; $b = 16$

c. $a = 1\,254$; $b = 26$ d. $a = 24\,576$; $b = 134$

e. $a = 65$; $b = 120$

Exercice 13 : donner la liste des diviseurs et fraction irréductible.

1. a. Donner la liste des diviseurs des huit diviseurs de l'entier 30 et des huit diviseurs de l'entier 24.

   b. Quels sont les diviseurs communs aux entiers 30 et 24?

2. Ecrire la fraction $\frac{30}{24}$ sous la forme d'une fraction irréductible

3. Effectuer le calcul suivant : $\frac{30}{24} - \frac{3}{4}$

Exercice 14 : démontrer si l'affirmation est vraie ou fausse.

Dire si l'affirmation, en justifiant, est vraie ou fausse.

Affirmation : Pour tous les nombres entiers n compris entre 2 et 9, l'entier $2^n - 1$ est un nombre premier.

Exercice 15 : décomposer en produit de facteurs premiers.

Donnée utile. Le début de la liste ordonnée des nombres premiers est :
2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29

1. Décomposer 140 et 870 en produit de nombres premiers.
2. En déduire la forme irréductible de la fraction $\frac{140}{870}$.

Exercice 16 : des fruits et décomposition en facteurs premiers.

Un primeur dispose de 24 pommes et 36 poires. Il souhaite préparer avec ces fruits des paquets de composition identique.

a. S'il fait 4 paquets, quelle est leur composition ?

b. Décomposer 24 et 36 en produit de facteurs premiers.

c. Combien de paquets le primeur peut-il faire au maximum ? Quelle sera alors la composition de chaque paquet ?

Exercice 17 : rendre irréductible chaque fraction avec les décompositions en facteurs premiers.

Rendre irréductible chaque fraction en décomposant le numérateur et le dénominateur en produit de facteurs premiers.

a. $\frac{126}{180}$ **b.** $\frac{48}{75}$ **c.** $\frac{220}{100}$

Exercice 18 : divisions successives et décomposition.

Pour décomposer en produit de facteurs premiers on peut poser les divisions successives de la façon suivante.

4 680	2
2 340	2
1 170	2
585	5
117	3
39	3
13	**13**

On essaye de diviser par les nombres premiers des plus petits au plus grands.

Ou bien par les plus faciles à identifier (2 ou 5).

Donc : $4\,680 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 13$

Détermine la décomposition en produit de facteurs premiers de :

a. $308 =$ ……………………………………………………

b. $252 =$ ……………………………………………………

c. $1\,470 =$ …………………………………………………

d. $3\,780 =$ …………………………………………………

e. $308 \times 1\,470 =$ ………………………………………

f. $\frac{3\,780}{252} =$ ………………………………………………

g. $252 \times 308 \times 1\,470 \times 3\,780 =$ …………………………

Exercice 19 : forme de produits de facteurs premiers.

a. Écris 504 et 540 sous forme de produits de facteurs premiers.

…………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………

b. Rends alors la fraction $\frac{504}{540}$ irréductible.

Exercice 20 : rendre la fraction irréductible.

Rends la fraction $\dfrac{1\,204}{258}$ irréductible en effectuant une seule simplification et en détaillant les calculs.

Exercice 21 : plus grand commun diviseur.

Voici la décomposition en produit de facteurs premiers des nombres 1 080 et 288 :

$$1\,080 = 2^3 \times 3^3 \times 5$$

$$288 = 2^5 \times 3^2.$$

a. Quel est le plus grand diviseur commun à ces deux nombres ?

....

....

....

b. Simplifie la fraction $\dfrac{1\,080}{288}$ pour la rendre irréductible.

Exercice 22 : divisions euclidiennes.

Les trois divisions euclidiennes ci-dessous sont exactes.

$$\begin{array}{r|l} 368 & \underline{15} \\ 8 & 24 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 368 & \underline{16} \\ 0 & 23 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 368 & \underline{14} \\ 4 & 26 \end{array}$$

Les nombres 14,15 et 16 sont-ils des diviseurs de 368?Justifier.

Quel est le plus petit multiple de 15 supérieur à 368?Justifier.

Quel est le plus grand multiple de 14 inférieur à 368 ?Justifier.

Exercice 23 : brins de muguet et roses.

Pour le 1er mai, Julie dispose de 182 brins de muguet et de 78 roses. Elle veut faire le plus grand nombre de bouquets identiques en utilisant toutes les fleurs.

a. Combien de bouquets identiques pourra-t-elle faire ?

....

....

....

....

....

....

b. Quelle sera la composition de chaque bouquet ?

....

....

Exercice 24 : terrain rectangulaire et clôture.

Aurélien possède un terrain rectangulaire de dimensions 78 sur 102 mètres qu'il souhaite clôturer. Afin de poser un grillage, il doit planter des poteaux régulièrement espacés et, pour simplifier le travail, il veut que la distance entre chaque poteau soit un nombre entier de mètres. De plus, il lui faut un poteau à chaque coin.

a. Deux poteaux peuvent-ils être espacés de cinq mètres ? De trois mètres ?

....

....

....

....

b. Aurélien veut planter le moins de poteaux possible. Que peux-tu dire alors de la distance entre deux poteaux ?

....

....

....

....

....

....

c. Combien doit-il alors planter de poteaux ?

....

Exercice 25 : guirlande électrique et lumières.

Une guirlande électrique est constituée de lumières rouges et bleues. Les lumières rouges s'allument toutes les 4 secondes et les lumières rouges toutes les 6 secondes.
À un instant donné, on voit les lumières rouges et bleues allumées en même temps.

- Au bout de combien de temps ce phénomène se reproduira-t-il pour la première fois ?

Exercice 26 : archéologie et arithmétique.

Des archéologues doivent explorer un terrain rectangulaire dont les dimensions sont 6,6 m et 8,58 m.
Pour faciliter la fouille, le terrain va être divisé en carrés identiques dont chaque côté est un nombre entier de centimètres.

1. Peut-on quadriller le terrain avec des carrés de 33 cm de côté ? Justifier.

2. Décomposer 660 et 858 en produits de facteurs premiers.

3. En utilisant cette décomposition, déterminer un carré permettant de quadriller le terrain et dont la longueur du côté est supérieure à 33 cm. Combien faudra-t-il de tels carrés pour quadriller le terrain ?

Exercice 27 : entreprise et boîte en carton.

Prise d'initiative

Une entreprise doit commander des boites en carton qui contiendront des pâtes de fruits.
Le cahier des charges est le suivant :

- Chaque boite contient 36 pâtes de fruits.
- Les pâtes de fruits ont la forme de cubes d'arête 2 cm.
- Les boites ont la forme d'un pavé droit.
- 20 000 pâtes de fruits sont à ranger.
- L'entreprise cherche à commander le moins de carton possible.
- Le cout du carton est de 15,50 € le m^2.

- Quel sera le cout de cette commande ?

Exercice 28 : panneau mural et carreaux.

Un panneau mural a pour dimensions 240 cm et 360 cm. On souhaite le recouvrir avec des carreaux de forme carrée, tous de même taille, posés bord à bord sans jointure.

1. Peut-on utiliser des carreaux de 10 cm de côté ? 14 cm de côté ? 18 cm de côté ?

2. Quelles sont toutes les tailles possibles de carreaux comprises entre 10 et 20 cm ?

3. On choisit des carreaux de 15 cm de côté. On pose une rangée de carreaux bleus sur le pourtour et des carreaux blancs ailleurs. Combien de carreaux bleus va-t-on utiliser ?

Exercice 29 : barquettes de nems et samossas.

1. Décomposer les nombres 162 et 108 en produits de facteurs premiers.

2. Déterminer deux diviseurs communs aux nombres 162 et 108 plus grands que 10.

3. Un snack vend des barquettes composées de nems et de samossas. Le cuisinier a préparé 162 nems et 108 samossas. Dans chaque barquette :

- le nombre de nems doit être le même ;
- le nombre de samossas doit être le même ;
- tous les nems et tous les samossas doivent être utilisés.

a. Le cuisiner peut-il réaliser 36 barquettes ?

b. Quel nombre maximal de barquettes pourra-t-il réaliser ?

c. Dans ce cas, combien y aura-t-il de nems et de samossas dans chaque barquette ?

Exercice 30 : affirmations vraies ou fausses.

Des affirmations sont données ci-dessous. Pour chacune des affirmations, indiquer si elle est vraie ou fausse. On rappelle que toutes les réponses doivent être justifiées.

1. **Affirmation 1** : Les diviseurs communs à 12 et 18 sont les mêmes que les diviseurs de 6.
2. **Affirmation 2** : 4 n'admet que deux diviseurs.
3. **Affirmation 3** : Deux nombres impairs n'ont que 1 comme diviseur commun.
4. **Affirmation 3** : Deux nombres impairs n'ont que 1 comme diviseur commun.
5. **Affirmation 4** : Tous les nombres premiers sont impairs.
6. **Affirmation 5** : Tous les nombres impairs sont premiers.

Exercice 31 : rechercher un nombre entier.

« *Je prends un nombre entier. Je lui ajoute 3 et je multiplie le résultat par 7. J'ajoute le triple du nombre de départ au résultat et j'enlève 21. J'obtiens toujours un multiple de 10.* » Est-ce vrai? Justifier.

Exercice 32 : un panneau mural.

Un panneau mural a pour dimensions 240 cm et 360 cm. On souhaite le recouvrir avec des carreaux de forme carrée, tous de même taille, posés bord à bord sans jointure.

1. Peut-on utiliser des carreaux de : 10 cm de côté? 14 cm de côté? 18 cm de côté?

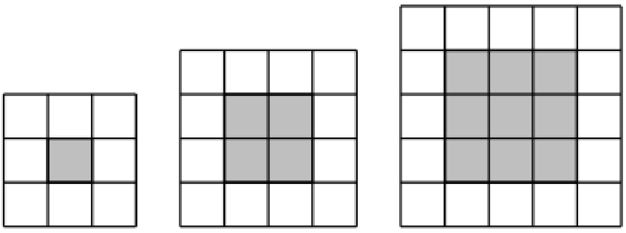
2. Quelles sont toutes les tailles possibles de carreaux comprises entre 10 et 20 cm?

3. On choisit des carreaux de 15 cm de côté. On pose une rangée de carreaux bleus sur le pourtour et des carreaux blancs ailleurs. Combien de carreaux bleus va-t-on utiliser?

Exercice 33 : motifs et carreaux de mosaïque.

Gaspard réalise des motifs avec des carreaux de mosaïque blancs et gris de la façon suivante :

Motif 1 Motif 2 Motif 3



Gaspard forme un carré avec des carreaux gris puis le borde avec des carreaux blancs.

1. Combien de carreaux blancs Gaspard va-t-il utiliser pour border le carré gris du motif 4 (un carré ayant 4 carreaux gris de côté)?

2.

2. a. Justifier que Gaspard peut réaliser un motif de ce type en utilisant exactement 144 carreaux gris.

2. b. Combien de carreaux blancs utilisera-t-il alors pour border le carré gris obtenu?

3. On appelle « motif n » le motif pour lequel on borde un carré de n carreaux gris de côté.

Trois élèves ont proposé chacun une expression pour calculer le nombre de carreaux blancs nécessaires pour réaliser le « motif n » :

- Expression n° 1 : $2 \times n + 2 \times (n+2)$
- Expression n° 2 : $4 \times (n+2)$
- Expression n° 3 : $4 \times (n+2) - 4$

Une seule de ces trois expressions ne convient pas. Laquelle?

Exercice 34 : une surface à paver.

Carole souhaite réaliser une mosaïque sur un mur de sa maison. La surface à paver est un rectangle de dimensions 108 cm et 225 cm et doit être entièrement recouverte par des carreaux de faïence carrés de même dimension sans découpe.

1. Carole peut-elle utiliser des carreaux de 3 cm de côté? De 6 cm de côté?

2. Quelle est la dimension maximale des carreaux que Carole peut poser?

Combien de carreaux utilisera-t-elle?