Exercices sur les nombres complexes .

Exercice 1 : vérifier des égalités.

P est le polynôme défini sur $\mathbb{C}$ par :

$$P(z) = z^3 + 2z^2 - 6z + 8.$$

Vérifier que $P(1+i) = 0$ et $P(1-i) = 0$.

Exercice 2 : une fonction numérique et nombres complexes.

f est la fonction qui, à tout nombre complexe $z \neq 1$, associe le nombre complexe :

$$f(z) = \frac{2iz - 1}{z - 1}.$$

Écrire sous forme algébrique :

a) $f(3)$; **b)** $f\left(\frac{1}{2}i\right)$; **c)** $f\left(\frac{1+i}{1-i}\right)$.

Exercice 3 : vérifier que les nombres sont des imaginaires purs.

$$z_1 = \frac{1-i}{3+5i} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{1+i}{3-5i}.$$

Vérifier que $z_1 + z_2$ est un nombre réel et que $z_1 - z_2$ est un imaginaire pur.

Exercice 4 : résoudre des équations dans C.

Pour les exercices résoudre dans $\mathbb{C}$ chaque équation.

a) $2z^2+3z-5=0$ **b)** $2z^2+3z+5=0$

a) $z^2+4=0$ **b)** $z^2-4z+4=0$

a) $\frac{1}{3}z^2+\frac{1}{6}z+1=0$ **b)** $9z^2+25=0$

a) $3z^2+6z+4=0$ **b)** $5z^2+2z=0$

Exercice 5 : résoudre l'équation avec des nombres complexes.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^2-(1+\sqrt{3})z+\sqrt{3}=0.$$

Exercice 6 : nombres complexes et trigonométrie.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^2-2(\cos\theta)z+1=0$$

lorsque : **a)** $\theta=\pi$; **b)** $\theta=\frac{\pi}{3}$.

Exercice 7 : résoudre dans C l'équation .

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$(z^2+3z+1)(z^2-z+6)=0.$$

Exercice 8 : polynôme et résolution de l'équation.

P est le polynôme définie sur $\mathbb{C}$ par :

$$P(z) = z^4 + 3z^3 + 6z^2 + 6z + 8.$$

a) Justifier la copie d'écran ci-dessous obtenue avec le logiciel Xcas.

```
1 factoriser_sur_C(z^4+3z^3+6z^2+6z+8)
```

$$\left(z+\frac{(-i)*(\sqrt{7})+3}{2}\right)*\left(z+\frac{i*(\sqrt{7})+3}{2}\right)*(z+i*(\sqrt{2}))*(z+(-i)*(\sqrt{2}))$$

b) En déduire la résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$.

Exercice 9 : systèmes d'équations avec des nombres complexes.

Déterminer les nombres complexes z_1 et z_2 tels que :

$$\begin{cases} z_1 z_2 = 10 \\ z_1 + z_2 = -2 \end{cases}$$

Exercice 10 : déterminer la forme algébrique.

déterminer la forme algébrique de chaque nombre complexe.

- $z_1 = (2+3i)(-1+i)$
- $z_2 = (1-i)^2$
- $z_1 = (5-i)(1-2i)(3+2i)$
- $z_2 = \dfrac{1}{i}$
- $z_1 = (2+i)^2(2-i)^2$
- $z_2 = \dfrac{1}{5+2i}$
- $z_1 = \dfrac{3+4i}{1+i}$
- $z_2 = \dfrac{1}{\sqrt{3}+4i}$

Exercice 11 : donner la forme algébrique du nombre complexe.

1. donner la forme algébrique de :

a) i^3 **b)** i^4 **c)** i^5 **d)** i^6 **e)** i^7

2. Déterminer i^n lorsque :

a) $n = 4k$ (avec $k \in \mathbb{N}^*$) ;

b) $n = 4k + 1$;

c) $n = 4k + 2$;

d) $n = 4k + 3$.

Exercice 12 : ecrire sous forme algébrique les nombres complexes.

$$z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Écrire sous forme algébrique : **a)** z^2 ; **b)** z^3 ; **c)** $\frac{1}{z}$.

Exercice 13 : déterminer graphiquement l'ensemble des points.

Dans chaque cas, déterminer graphiquement l'ensemble des points M du plan complexe dont l'affixe z vérifie la relation donnée.

a) $|z| = 5$ **b)** $\arg(z) = \frac{\pi}{6}\,[2\pi]$

c) $|z| \leqslant 4$ et $\arg(z) = -\frac{\pi}{3}\,[2\pi]$

Exercice 14 : résoudre dans C chacune des équations.

Résoudre dans $\mathbb{C}$, chaque équation :

a) $\frac{z^2 + 2z + 5}{2z^2 + 1} = 1$;

b) $\frac{1}{z^2} - \frac{4}{z} + 5 = 0$;

c) $\frac{z - 2}{z - 1} = z$.

Exercice 15 : démontrer que le quadrilatère est un parallélogramme.

Dans le plan complexe, A, B, C et D sont les points d'affixes respectives :

$z_A = -5 + i$, $z_B = 1 + 2i$, $z_C = 2 - i$ et $z_D = -4 - 2i$.

a) Placer les points A, B, C et D.

b) Démontrer que le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.

c) Déterminer l'affixe du point M centre du parallélogramme ABCD.

d) Déterminer l'affixe du point N quatrième sommet du parallélogramme BCMN.

Exercice 16 : déterminer l'affixe du centre du parallélogramme.

Dans le plan complexe, A, B, C, D sont les points d'affixes respectives $3 + i$, $2 - 2i$, $2i$ et $1 + 5i$.

a) Réaliser une figure.

b) Démontrer de deux façons différentes que ABCD est un parallélogramme.

c) Déterminer l'affixe du centre du parallélogramme.

Exercice 17 : déterminer l'affixe du point M' symétrique.

Dans le plan complexe, M et A sont les points d'affixes $z_M = 3 - i$ et $z_A = -1 + 2i$.

a) Placer les points M et A.

b) Déterminer l'affixe du point M′ symétrique de M par rapport à A.

Exercice 18 : déterminer un ensemble de points.

Dans le plan complexe, on note $\mathcal{F}$ l'ensemble des points M d'affixe z tels que $Z = z^2 + iz$ soit réel.

a) Chacun des points suivants appartient-il à l'ensemble $\mathcal{F}$:

- A d'affixe $3 - \frac{1}{2}i$?
- B d'affixe $-5 + i$?
- C d'affixe $-\frac{3}{2}i$?

b) Déterminer l'ensemble $\mathcal{F}$.

Exercice 19 : déterminer le module et l'argument.

1. a) Déterminer le module et un argument du nombre complexe $z_1 = -\sqrt{3} + i$.

b) Donner une forme trigonométrique de z_1.

2. a) Écrire une forme trigonométrique du nombre complexe z_2 de module 6 et d'argument $\frac{3\pi}{4}$.

b) Déterminer la forme algébrique de z_2.

Exercice 20 : forme trigonométrique et forme algébrique.

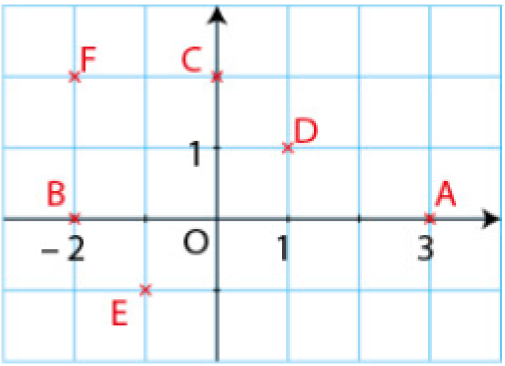
a) Donner une forme trigonométrique du nombre complexe $2\sqrt{3} - 2i$.

b) Donner la forme algébrique du nombre complexe de module 4 et d'argument $\frac{2\pi}{3}$.

Exercice 21 : déterminer par lecture graphique le module et l'argument.

Dans chaque cas, déterminer par lecture du graphique ci-dessous le module, puis un argument du nombre complexe.
En déduire une forme trigonométrique.

a) $z_A = 3$ **b)** $z_B = -2$ **c)** $z_C = 2i$
d) $z_D = 1 + i$ **e)** $z_E = -1 - i$ **f)** $z_F = -2 + 2i$



Exercice 22 : déterminer la forme algébrique et trigonométrique.

On donne $z = \sqrt{3} - i$ et $z' = -2 + 2i$.

1. a) Déterminer la forme algébrique de zz'.

b) Déterminer une forme trigonométrique de zz'.

c) En déduire les valeurs exactes de $\cos\dfrac{7\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{7\pi}{12}$.

2. a) Démontrer que $(zz')^6$ est un nombre imaginaire pur.

b) Démontrer que $(zz')^{36}$ est un nombre réel.

Exercice 23 : déterminer les affixes et démontrer l'alignement.

Dans le plan complexe, A, B et C sont les points d'affixes :

$z_A = 3 + 2i, \quad z_B = -5 + 2i \quad$ et $\quad z_C = -3i.$

a) Placer les points A, B et C.

b) Déterminer les affixes des points A′ et B′ milieux respectifs des segments [BC] et [AC].

c) Déterminer l'affixe du point G défini par $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$.

d) Démontrer que les points B′, G et B sont alignés.

Exercice 24 : affixe d'un sommet du parallélogramme.

Dans le plan complexe, A, B et C sont les points d'affixes :

$z_A = -4 + 2i, \quad z_B = -1 - i \quad$ et $\quad z_C = 4 + i.$

1. Placer les points A, B et C.

2. a) Déterminer l'affixe du point M quatrième sommet du parallélogramme ABCM.

b) Placer le point M.

3. a) N est le quatrième sommet du parallélogramme ABNC. Démontrer que $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{CN}$.

b) En déduire l'affixe du point N et placer ce point.

Exercice 25 : donner la forme algébrique du nombre complexe.

Dans chaque cas, écrire sous forme algébrique le nombre complexe z.

a) $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

b) $z = \sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

c) $z = \sqrt{3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$

Exercice 26 : déterminer la partie réelle.

Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de chacun des nombres complexes suivants.

1. $a = 3 + 2i$
2. $b = -2i + 4$
3. $c = \dfrac{3 + 5i}{2}$
4. $d = \dfrac{2i - 1}{\sqrt{2}}$
5. $e = 4i$
6. $f = 0$
7. $g = i^2$
8. $h = i^7$

Exercice 27 : valeurs de a pour être un réel ou un imaginaire.

On considère un réel a et le nombre complexe $z = a^2 + 1 + 2i(a^2 - 3)$.

1. Déterminer les éventuelles valeurs de a pour lesquelles z est un réel.

2. Déterminer les éventuelles valeurs de a pour lesquelles z est un imaginaire pur.

Exercice 28 : déterminer mentalement les formes algébriques.

Déterminer mentalement les formes algébriques des nombres suivants.

1. $Z_1 = (2 + 4i)^2$
2. $Z_2 = (3 - 2i)^2$
3. $Z_3 = (1 + i)^3$

Exercice 29 : déterminer les conjugués.

Déterminer les conjugués des nombres suivants.

1. $A = 3 + 2i$
2. $B = i$
3. $C = 3i - 4$
4. $D = -5 - 6i$

Exercice 30 : somme de deux nombres complexes.

On considère les nombres complexes :

$$z_1 = \frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} \text{ et } z_2 = \frac{1-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}.$$

Sans effectuer le calcul, justifier que $z_1 + z_2$ est un nombre réel.

Exercice 31 : formes algébriques de nombres complexes.

Déterminer les formes algébriques des nombres complexes donnés.

1. $a = 2 + 2\mathrm{i} - 3\mathrm{i} - 3$ **2.** $b = 1 + \mathrm{i} - \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\mathrm{i}\right)$

3. $c = -2 + 3\mathrm{i} - (3 - 3\mathrm{i})$ **4.** $d = \frac{5}{2} + \frac{3}{2}\mathrm{i} - \left(-\frac{5}{2} - \frac{3}{2}\mathrm{i}\right)$

1. $a = -(1+\mathrm{i}) + 2\mathrm{i}\left(-\frac{1}{2} + \mathrm{i}\right)$

2. $b = 2\mathrm{i}(1-\mathrm{i}) - 3\mathrm{i}(1+\mathrm{i})$

3. $c = -\sqrt{2}(\sqrt{2} - 2\mathrm{i}\sqrt{2}) - \sqrt{3}(\mathrm{i}\sqrt{3} - 2\sqrt{3})$

4. $d = \mathrm{i}\sqrt{2}(2\sqrt{2} - \mathrm{i}) + 2\mathrm{i}\sqrt{3}(\mathrm{i} - \sqrt{3})$

1. $a = (2+\mathrm{i})(1+3\mathrm{i})$ **2.** $b = \left(\frac{3}{2} - 2\mathrm{i}\right)\left(2 + \frac{3}{2}\mathrm{i}\right)$

3. $c = \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}\right)(1+2\mathrm{i})$ **4.** $d = \left(-\frac{2}{3} - \mathrm{i}\right)(3 - 4\mathrm{i})$

1. $a = (3+5\mathrm{i})^2$ **2.** $b = \left(3\mathrm{i} - \frac{1}{3}\right)^2$

3. $c = (2+3\mathrm{i})(2-3\mathrm{i})$ **4.** $d = (\mathrm{i}\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{2} - \mathrm{i}\sqrt{3})$

Exercice 32 : deux nombres égaux.

Soient a et b deux réels et z_1 et z_2 deux nombres complexes définis par $z_1 = a^2 + a + \mathrm{i}(b^2 + 1)$ et $z_2 = 3a^2 - 3 + 2ib$.

Déterminer les éventuelles valeurs de a et b telles que z_1 et z_2 soient égaux.

Exercice 33 : déterminer les valeurs de x.

Soient x un réel et deux nombres complexes z_1 et z_2 définis par $z_1 = 3x - 3 + i(x^2 + 1)$ et $z_2 = x^2 - x + i(x^2 - 1)$.

1. Déterminer les éventuelles valeurs de x telles que $z_1 + z_2$ soit un imaginaire pur.

2. Déterminer les éventuelles valeurs de x telles que $z_1 + z_2$ soit un réel.

Exercice 34 : donner le conjugué sous forme algébrique.

Écrire le conjugué de z sous forme algébrique.

1. $z = i(2 + 2i) - 3i(1 + 2i)$

2. $z = -2i(1 + i) + \frac{3}{2}i(2 - 4i)$

3. $z = (2 + i)(1 + 3i)$

4. $z = (2i - 3)(3 + i)$

1. $z = (1 + i)^2$ **2.** $z = (2 + i)^3$

3. $z = (1 - i)^4$ **4.** $z = (3 + 2i)^3$

1. $z = \frac{1}{i}$ **2.** $z = \frac{1}{1 + i}$

3. $z = \frac{2 + i}{1 - 2i}$ **4.** $z = \frac{1 - i}{2i - 1}$

5. $z = \frac{3 + 2i}{2i - 3}$ **6.** $z = \frac{-1 - i}{2 + i}$

Exercice 35 : racine d'un polynôme.

Montrer que le nombre a est une racine du polynôme P, puis factoriser P en produit de polynômes de degré 1.

$P(z) = z^3 + 4z^2 + 6z + 4$ et $a = -2$.

$P(z) = 2z^3 - 14z^2 + 38z - 26$ et $a = 1$.

$P(z) = z^4 - 2z^3 + z^2 + 2z - 2$ et $a = -1$.

$P(z) = z^4 - z^3 - 5z^2 - z - 6$ et $a = i$.

Exercice 36 : calculs et nombres complexes.

Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de chacun des nombres suivants.

1. $z_1 = 2$ **2.** $z_2 = -3i$ **3.** $z_3 = i - 3$

4. $z_4 = z_1 + z_3$ **5.** $z_5 = z_2 \times z_3$

Dans chacun des cas suivants, déterminer les réels a et b vérifiant l'égalité.

1. $a + 3i = 2 + i(1 - b)$

2. $2 + a + i(b^2 + b) = i(2b - ia^2) + 3a + 3$

Écrire chacun des nombres suivants sous forme algébrique.

1. $z_1 = (3 - 2i) - (3 + 2i)$ **2.** $z_2 = 2(1 + i) + i(2i - 1)$

3. $z_3 = (1 + i)(3 + 2i)$ **4.** $z_4 = (1 - i)^3$

5. $z_5 = (1 - i)^5$

Exercice 37 : produits de nombres complexes.

Calculer.

1. $z=(3+i\sqrt{3})(2i\sqrt{3}+5)$

2. $z=(2\sqrt{2}+i\sqrt{3})(3i\sqrt{3}-\sqrt{2})$

3. $z=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

4. $z=\left(2\sqrt{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(\sqrt{3}-i\sqrt{2})$

5. $z=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Exercice 38 : calculer les produits suivants.

Calculer.

1. $z=\left(3+\frac{1}{2}i\right)\left(3-\frac{1}{2}i\right)$

2. $z=\left(-\frac{1}{3}+\frac{2}{5}i\right)\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{5}i\right)$

3. $z=\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

4. $z=\left(\frac{1}{2}i-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)$

5. $z=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(i\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

6. $z=\left(i\frac{2\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$

Exercice 39 : conjugué et forme algébrique.

Écrire sous forme algébrique le conjugué de chacun des nombres suivants.

1. $z_1 = -2$ **2.** $z_2 = -\dfrac{3i}{4}$ **3.** $z_3 = i - 2$

4. $z_4 = z_1 + z_2$ **5.** $z_5 = z_2 \times z_3$ **6.** $z_6 = z_2(z_3 + z_4)$

Calculer chacun des nombres suivants et les écrire sous forme algébrique.

1. $z_1 = \overline{10 - (2 + 3i)}$ **2.** $z_2 = \overline{(2 - 3i)(i + 2)}$

3. $z_3 = \overline{\left(\dfrac{1}{2i + 4}\right)}$ **4.** $z_4 = \overline{\left(\dfrac{i + 3}{1 - 4i}\right)}$

Exercice 40 : quotients avec des racines carrées.

Calculer.

1. $a = \dfrac{\sqrt{2} + i\sqrt{3}}{2 + i}$ **2.** $b = \dfrac{2i - \sqrt{2}}{3 + i}$

3. $c = \dfrac{\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{-1 + i}$ **4.** $d = \dfrac{\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{-\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i}$

Exercice 41 : systèmes de deux équations à deux inconnues.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ chacun des systèmes de deux équations à deux inconnues suivants.

AIDE

On commencera par écrire le système uniquement en fonction de z_1 et z_2 et sans conjugué.

1. $\begin{cases} \dfrac{1}{2}z_1 + z_2 = 2 \\ \dfrac{1}{2}\overline{z_1} + i \times \overline{z_2} = 0 \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} 3z_1 - 2z_2 = 4i - 2 \\ \overline{z_1} + 2\overline{z_2} = 2 \end{cases}$

3. $\begin{cases} z_1 - z_2 = 3 - 4i \\ \overline{z_1} + 2\overline{z_2} = 8 - i \end{cases}$ **4.** $\begin{cases} 6z_1 - 3z_2 = 12 + i \\ 3\overline{z_1} - \overline{z_2} = 6 \end{cases}$

Exercice 42 : affirmations vraies ou fausses.

VRAI/FAUX

Soient $z_1 = 1 - 3i$ et $z_2 = 2i + 3$.

1. « Le conjugué de la somme $z_1 + z_2$ est égal à $4 + i$. »

2. « Le conjugué du produit $z_1 \times z_2$ est égal à $9 - 7i$. »

3. « Le conjugué de $(z_1)^3$ est égal à $-26 - 18i$. »

4. « Le conjugué de $(z_1 \times \overline{z_2})^2$ est égal à $112 - 66i$. »

Exercice 43 : résoudre les équations.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ chacune des équations proposées.
On écrira les solutions sous forme algébrique.

1. $(z + 3i)(2z - 3 + i) = 0$

2. $(z - 2i)(iz + 1) = 0$

3. $(iz + 1 + i)(3iz - 1) = 0$

4. $((1 + i)z - 1)((2 + i)z + 1) = 0$

1. $z^2 + 1 = 0$

2. $z^2 + 2 = 0$

3. $z^2 + 16 = 0$

4. $z^2 + 20 = 0$

5. $z^2 + \frac{1}{4} = 0$

6. $z^2 + \frac{1}{3} = 0$

7. $z^2 + \frac{11}{4} = 0$

8. $z^2 + \frac{3}{2} = 0$

Exercice 44 : factoriser des polynômes à coefficients complexes.

Écrire chacun des polynômes à coefficients complexes suivants sous la forme $z^n - a^n$ avec $a \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, puis les factoriser par $z - a$ dans $\mathbb{C}$.

1. $P(z) = z^3 + 1$ **2.** $P(z) = z^3 - 8$ **3.** $P(z) = z^3 + i$

4. $P(z) = z^3 + 8i$ **5.** $P(z) = z^5 - 32i$

Exercice 45 : ecrire ces polynômes en produit de facteurs.

Écrire chacun des polynômes à coefficients réels suivants en produit de facteurs de la forme $z-\alpha$ avec α dans $\mathbb{C}$.

1. $P(z)=z^3+4z$

2. $P(z)=z^3+z^2+z+1$

3. $P(z)=z^3-2z^2+z-2$

4. $P(z)=z^5-z$

5. $P(z)=z^5+3z^3+z^2+3$

6. $P(z)=z^5-z^4+5z^3-5z^2+4z-4$

AIDE

Pour **5.**, remarquer que z^5+3z^3 se factorise par z^3.