Exercices sur limite et variation d'une suite .

Exercice 1 : fonction et monotonie d'une suite.

Étudier la monotonie de la suite u en déterminant une fonction f définie sur un intervalle de type $[a\,;\,+\infty[$ avec $a > 0$ telle que $u_n = f(n)$ dont on étudiera les variations.

1) $u_n = 4n - 7$

2) $u_n = \sqrt{n}$

3) $u_n = n^2 - 4n + 5$

4) $u_n = \dfrac{1}{4n}$

Exercice 2 : etudier la monotonie de suites.

Étudier la monotonie de la suite u en déterminant une fonction f définie sur un intervalle de type $[a\,;\,+\infty[$ avec $a > 0$ telle que $u_n = f(n)$ dont on étudiera les variations.

1) $u_n = n^2 - 13n + 36$

2) $u_n = \dfrac{n+2}{3n+2}$

Exercice 3 : démontrer que la suite n'est pas monotone.

Pour chacun des cas ci-dessous, démontrer que la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n n'est pas monotone.

1) $u_n = 3n^2 - 3^n$

2) $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = (u_n - 1)^2 \end{cases}$

3) $u_n = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$

Exercice 4 : déterminer le sens de variation de la suite.

Pour chacun des cas ci-dessous, déterminer le sens de variation de la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par trois méthodes différentes.

1) $u_n = \sqrt{n} + 2$

2) $u_n = \dfrac{1}{n+1}$

3) $u_n = 3n^2 + n$

Étudier la monotonie de la suite u en choisissant une méthode adaptée.

1) $u_n = 3n^2$

2) $u_n = \dfrac{2n+5}{n+1}$

3) $u_n = \sqrt{n+1}$

4) $u_n = \dfrac{0,5^n}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 5 : etudier la monotonie de ces suites en choisissant la méthode adaptée.

Étudier la monotonie de la suite u en choisissant une méthode adaptée.

1) $u_n = n - n^2$

2) $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$

3) $u_n = 3n \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$

Étudier la monotonie de la suite u en choisissant une méthode adaptée.

1) $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = (u_n + 1)^2 \end{cases}$

3) $u_n = \dfrac{2^{2n+2}}{3^n}$

2) $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{n+2} \end{cases}$

Exercice 6 : monotonie de différentes suites.

Étudier la monotonie de la suite u en choisissant une méthode adaptée.

1) $u_n = \dfrac{\sqrt{n}}{2^n}$

3) $u_n = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n}$

2) $u_n + 1 = \dfrac{u_n}{1 + {u_n}^2}$ et $u_0 = 4$

Soit la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = 1 \times 2 \times ... \times n$.

Étudier la monotonie de la suite (u_n).

Remarque : $u_n = n!$ et on appelle ce nombre « factorielle n ».

Exercice 7 : problème de plutonium et de suites.

Le plutonium 239 est un élément radioactif.

On sait que la quantité de plutonium 239 diminue de 0,003 % tous les ans.

On s'intéresse à un déchet radioactif contenant 1 g de plutonium 239 l'année $t = 0$ et on note t le nombre d'années écoulées à partir de ce moment.

On note m_t la masse de plutonium 239, exprimée en gramme, présente dans le déchet à l'instant t.

1) Écrire m_{t+1} en fonction de m_t.
2) Étudier la nature de la suite (m_t) puis écrire m_t en fonction de t.
3) Étudier le sens de variations de la suite (m_t).
4) Déterminer, à l'aide d'un tableur, le nombre d'années nécessaires pour diminuer de moitié la masse de plutonium 239 dans ce déchet.

Cette durée s'appelle demi-vie radioactive du plutonium 239.

Exercice 8 : suite arithmétique et monotonie.

Soit la suite arithmétique (u_n) de premier terme $u_0 = \frac{1}{3}$ et de raison $r = 0,4$.

Étudier la monotonie de (u_n).

Soit la suite arithmétique (u_n) de premier terme $u_0 = 10$ et de raison $r = -2$.

Étudier la monotonie de (u_n).

Soit la suite arithmétique (u_n) de premier terme $u_0 = -2$ et de raison $r = -2$.

Étudier la monotonie de (u_n).

Soit la suite arithmétique (u_n) de premier terme $u_0 = -5$ et de raison $r = \frac{1}{4}$.

Étudier la monotonie de (u_n).

Exercice 9 : suite géométrique et monotonie.

Soit la suite géométrique (v_n) de premier terme $v_0 = -5$ et de raison $q = \dfrac{1}{4}$.

Étudier la monotonie de (v_n).

Soit la suite géométrique (v_n) de premier terme $v_0 = \dfrac{1}{5}$ et de raison $q = 6$.

Étudier la monotonie de (v_n).

Soit la suite géométrique (v_n) de premier terme $v_0 = 5$ et de raison $q = -\dfrac{1}{5}$.

Étudier la monotonie de (v_n).

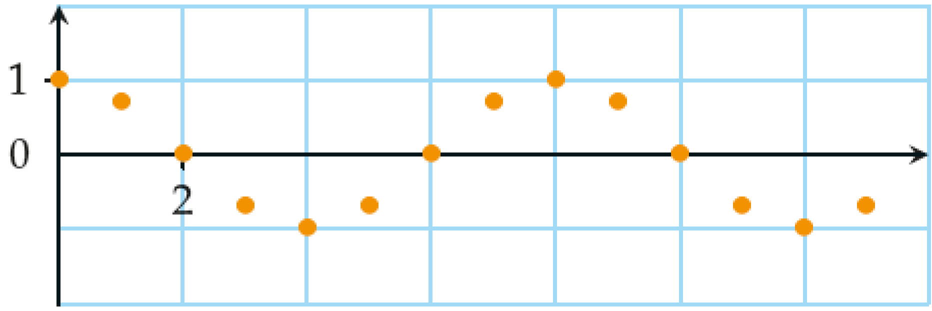
Soit la suite géométrique (v_n) de premier terme $v_0 = -\dfrac{1}{2}$ et de raison $q = -\dfrac{1}{2}$.

Étudier la monotonie de (v_n).

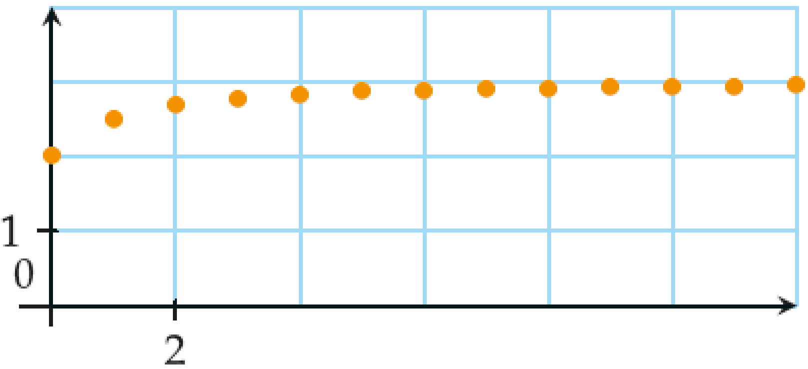
Exercice 10 : par lecture graphique, indiquer si la suite est monotone.

Par lecture graphique, indiquer si la suite représentée semble monotone et conjecturer son éventuelle limite.

1)



2)



Exercice 11 : conjecturer la limite de la suite à l'aide de la calculatrice.

À l'aide d'une calculatrice, conjecturer la limite éventuelle des suites u définies sur $\mathbb{N}$ par :

1) $u_n = 2n^2 - 5n - 2$

2) $u_n = -3n^3 + 4n^2 - 1$

À l'aide d'une calculatrice, conjecturer la limite éventuelle des suites u.

1) définie pour $n > 1$ par $u_n = \dfrac{2n+1}{n-1}$

2) définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{2n+1}{n^2+4}$

3) définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{2n^2-1}{n+1}$

4) définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{5n+1}{3n-2}$

Exercice 12 : conjecturer la limite avec la calculatrice.

À l'aide d'une calculatrice, conjecturer la limite éventuelle des suites u définie pour $n \in \mathbb{N}$.

1) $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = 2u_n$

2) $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = -\dfrac{1}{2}u_n$

3) $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{5}{u_n}$

Exercice 13 : limite d'une suite géométrique.

Limite d'une suite géométrique

1) À l'aide d'une calculatrice, conjecturer la limite éventuelle des suites u définie pour $n \in \mathbb{N}$.

a) $u_n = (-4)^n$

b) $u_n = 3^n$

c) $u_n = 0,6^n$

d) $u_n = (-0,4)^n$

e) $u_n = 1^n$

f) $u_n = (-1)^n$

2) De façon générale, émettre une conjecture portant sur la limite de (q^n) avec $q \in \mathbb{R}$ selon les valeurs de q.

Exercice 14 : démontrer qu'une suite récurrente est constante.

Soient u et v les suites définies pour tout entier naturel n , par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 4v_n}{7} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0 = 4 \\ v_{n+1} = \dfrac{4u_n + 3v_n}{7} \end{cases}$$

1) Calculer u_0, u_1, v_1, v_2.

2) Soit (w_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $w_n = u_n + v_n$.
Démontrer que (w_n) est constante.

Exercice 15 : balle rebondissante et variation d'une suite.

Une balle rebondissante est telle que chaque rebond a une hauteur égale à 80 % du rebond précédent.

1) Si on appelle h_n la hauteur en cm du n-ième rebond, montrer que (h_n) est une suite géométrique.

2) Étudier les variations de cette suite.

3) Au bout de combien de rebonds sa hauteur sera-t-elle inférieure au cinquième de sa hauteur initiale ?

Exercice 16 : suite récurrente, suite géométrique et variations.

On considère la suite (u_n) définie par tout entier naturel n par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = \dfrac{6u_n + 4}{u_n + 9}$.

Soit v la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{u_n + 4}{u_n - 1}$.

1) Démontrer que la suite v est géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.

2) En déduire l'expression de v_n en fonction de n.

3) Exprimer u_n en fonction de v_n et en déduire l'expression de u_n en fonction de n.

4) Étudier les variations de la suite (u_n).

Exercice 17 : une suite arithmétique et ses variations.

On considère la suite (u_n) définie par tout entier naturel n par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{9}{6 - u_n}$.

1) À l'aide de la calculatrice, conjecturer le sens de variations de la suite (u_n) ainsi que sa limite éventuelle.

2) On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = \dfrac{1}{u_n - 3}$.

3) Démontrer que (v_n) est une suite arithmétique de raison $-\dfrac{1}{3}$.

4) En déduire l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n.

5) Étudier les variations de la suite (u_n).

Exercice 18 : déterminer l'expression d'une suite.

On considère la suite (w_n) définie, pour tout entier naturel n, par $w_n = \dfrac{n+2(-1)^n}{n+2}$.

1) **a)** Déterminer l'expression de w_n pour les entiers naturels n pairs.

b) Déterminer l'expression de w_n pour les entiers naturels n impairs, puis simplifier l'expression.

2) Soient (p_n) et (i_n) les suites définies, pour tout entier naturel n, par $p_n = w_{2n}$ et $i_n = w_{2n+1}$.

a) Donner l'expression de p_n en fonctionde n.

Que remarque-t-on ?

b) Exprimer i_n et i_{n+1} en fonction de n. En déduire que la suite (i_n) est croissante.

3) Que peut-on dire sur la monotonie de (w_n) ?

Exercice 19 : somme des inverses et limite.

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par :

$$u_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

1) Calculer à la main les quatre premiers termes de la suite (u_n).

2) Étudier la monotonie de la suite (u_n).

3) n étant un entier naturel non nul, écrire un algorithme qui calcule les n premiers termes de la suite (u_n).

4) Conjecturer la limite éventuelle de la suite (u_n).

5) Écrire un algorithme permettant de déterminer un seuil N (entier naturel non nul) tel que pour tout entier $n \geq N$, $u_n \geq 10^3$.

Exercice 20 : une étude de la monotonie d'une suite Un.

Étudier la monotonie de la suite u, pour tout entier naturel n, en déterminant le signe de $u_{n+1} - u_n$.

1) $\begin{cases} u_0 = -4 \\ u_{n+1} = u_n - 3 \end{cases}$

2) $u_n = 4^n$

3) $\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = u_n - \dfrac{1}{n^2} \end{cases}$

Exercice 21 : suite récurrente et monotonie.

Étudier la monotonie de la suite u, pour tout entier naturel n, en déterminant le signe de $u_{n+1} - u_n$.

1) $u_n = n^2 + 2n$

2) $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \left(u_n + \dfrac{1}{2}\right)^2 \end{cases}$

3) $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 3n + u_n \end{cases}$

Exercice 22 : comparer le quotient de deux termes consécutifs.

Étudier la monotonie de la suite v, pour tout entier naturel n, en comparant $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ à 1.

1) $v_n = \dfrac{2^n}{n}$ pour $n \geq 1$

2) $\begin{cases} v_0 = 3 \\ v_{n+1} = 3{v_n}^3 + v_n \end{cases}$

3) $\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = \dfrac{1}{2} v_n \end{cases}$

Exercice 23 : monotonie de suites et comparaison.

Étudier la monotonie de la suite v, pour tout entier naturel n, en comparant $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$ à 1.

1) $v_n = \dfrac{5}{8^n}$

2) $v_n = \dfrac{1}{2^n}$

3) $v_n = 2n \times 4^{-n}$ pour n non nul