Exercices sur probabilités conditionnelles et indépendance .

Exercice 1 : probabilité et étude de boules dans une urne.

Dans une urne, il y n boules rouges et p boules bleues. On tire une boule dans l'urne puis on la remet.

- Si la boule tirée est rouge, on double le nombre de boules rouges dans l'urne.
- Si la boule tirée est bleue, on double le nombre de boules bleues dans l'urne.

On réalise ensuite un deuxième tirage. Déterminer les nombres possibles de boules rouges et bleues dans l'urne de départ avec les informations suivantes :

- la probabilité que la deuxième boule soit rouge sachant que la première est rouge est $\frac{16}{33}$;
- la probabilité que la deuxième boule soit bleue sachant que la première est bleue est $\frac{17}{21}$.

Exercice 2 : probabilités et test danss une entreprise.

Dans une entreprise, parmi les candidats qui se présentent aux tests, il y a 60 % de garçons.

Après avoir pris connaissance des résultats des tests, l'entreprise engage 70 % des garçons candidats et 80 % des filles candidates.

On choisit un candidat au hasard et on définit les événements : F : « Le candidat est une fille », G : « Le candidat est un garçon » et E : « Le candidat est engagé ».

a) Traduire les informations de l'énoncé en termes de probabilités.

b) Représenter la situation par un arbre pondéré.

c) Calculer la probabilité que le candidat soit une fille et qu'elle soit engagée dans l'entreprise.

Exercice 3 : sondage auprès des vacanciers et arbre pondéré.

Un sondage a été effectué auprès de vacanciers sur leurs pratiques sportives pendant leurs congés.

Ce sondage révèle que 45 % des vacanciers fréquentent une salle de sport pendant leurs congés et parmi ceux-ci, 60 % pratiquent la natation.

Parmi les vacanciers qui ne fréquentent pas une salle de sport, 70 % pratiquent la natation.

On choisit un vacancier au hasard.

On considère les événements suivants :

S : « Le vacancier fréquente une salle de sport » ;

N : « Le vacancier pratique la natation ».

a) Représenter la situation par un arbre pondéré.

b) Calculer la probabilité que le vacancier ne fréquente pas de salle de sport et ne pratique pas la natation.

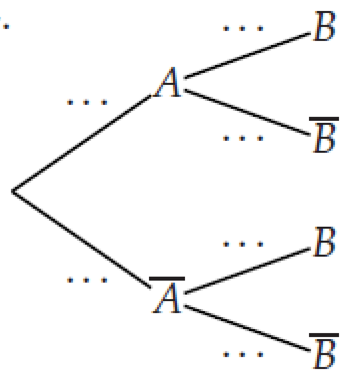
Exercice 4 : une étude de dragées dans une boîte.

Sophie a mis des dragées dans une boîte, les unes contiennent une amande, les autres non :

- 30 % des dragées contiennent une amande ;
- 40 % des dragées avec amande sont bleues, les autres sont roses ;
- 75 % des dragées sans amande sont bleues, les autres sont roses.

Sophie choisit au hasard une dragée dans la boîte et on considère les évènements :

- A : « la dragée choisie contient une amande » ;
- B : « la dragée choisie est bleue ».



1) Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-contre.
2) Montrer que $P(A \cap B) = 0{,}12$.
3) Calculer $P(B)$.
4) En déduire $P_B(A)$.
5) Calculer $P_{\overline{B}}(A)$.
6) Sophie préfère les dragées contenant une amande. Doit-elle plutôt choisir une dragée bleue ou bien une dragée rose ?

Exercice 5 : une épidémie dans un pays et les probabilités.

Dans un pays, une épidémie touche 10 % de la population. Un test de dépistage de la maladie a été mis au point mais il n'est pas parfait :

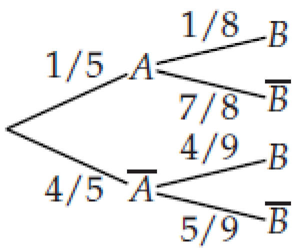
- si un individu n'est pas touché par la maladie, le test est tout de même positif dans 1 % des cas ;
- si un individu est touché par la maladie, le test est tout de même négatif dans 0,1 % des cas.

1) Représenter la situation par un arbre pondéré.
2) Toute la population passe le test de dépistage et on décide de donner un traitement à tous les individus ayant un test positif.
   a) Montrer que le traitement est donné à 10,89 % de la population.
   b) À quel pourcentage de la population le traitement est-il donné à tort ?
3) On tire un échantillon de 100 individus dans la population, ce tirage étant assimilable à un tirage avec remise.
   a) Quelle est la probabilité que 10 individus exactement soient sous traitement ?
   b) Quelle est la probabilité que 5 individus ou moins soient sous traitement ?

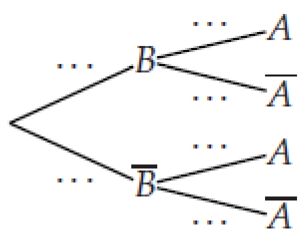
Exercice 6 : compléter des arbres de probabilité.

Compléter l'arbre 2 en utilisant l'arbre 1 :

Arbre 1



Arbre 2



Exercice 7 : une tombola et l'expérience aléatoire.

Miao veut organiser une tombola : elle prévoit de vendre des tickets dont 20 % sont gagnants et 80 % sont perdants.

Pour chaque gagnant, elle organisera ensuite un tirage au sort tel qu'il y ait :

- 80 % de chance d'obtenir un lot de 1 € ;
- x % de chance d'obtenir un lot de 2 € ;
- $20 - x$ % de chance d'obtenir un lot de 100 €.

1) À combien Miao doit-elle fixer la probabilité d'obtention du deuxième lot pour qu'elle puisse espérer ne dépenser que 1,71 € par ticket en achats de lots.
2) Proposer une expérience aléatoire permettant de faire ce tirage au sort.

Exercice 8 : achat de pain et événement.

Chaque jour Bill doit décider s'il achète du pain ou non.

- S'il a acheté du pain un jour, la probabilité qu'il en achète le lendemain est 0,3 (parce qu'il lui en reste parfois du jour précédent ou qu'il n'en a simplement pas envie ce jour-là).
- S'il n'a pas acheté de pain un jour, la probabilité qu'il en achète le lendemain est 0,8.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle A_n l'évènement « Bill achète du pain le n^{e} jour » et on note $p_n = P(A_n)$.

Aujourd'hui (le 1er jour), Bill a acheté du pain, ainsi $p_1 = 1$.

1) Calculer p_2 et p_3.
2) Représenter la situation par un arbre sur lequel figurent les évènements A_n, $\overline{A_n}$, A_{n+1} et $\overline{A_{n+1}}$.
3) Montrer que $p_{n+1} = 0{,}8 - 0{,}5p_n$.
4) Montrer que $p_n = \dfrac{7}{15}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} + \dfrac{8}{15}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
5) a) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$.
   b) Interpréter concrètement le résultat de la question précédente.

Exercice 9 : deux événements indépendants.

On considère deux évènements indépendants A et B tels que $P(A) = 0{,}15$ et $P(A \cap B) = 0{,}085$.
Calculer $P(B)$.

On considère deux évènements indépendants E et F tels que $P\left(\overline{F}\right) = 0{,}53$ et $P(E \cap F) = 0{,}25$.
Calculer $P(E)$.

On considère deux évènements indépendants C et D tels que $P(C \cup D) = 0{,}23$ et $P(C) = 0{,}11$.
Calculer $P(D)$.

Exercice 10 : don de sans et probabilité sur les autorisations.

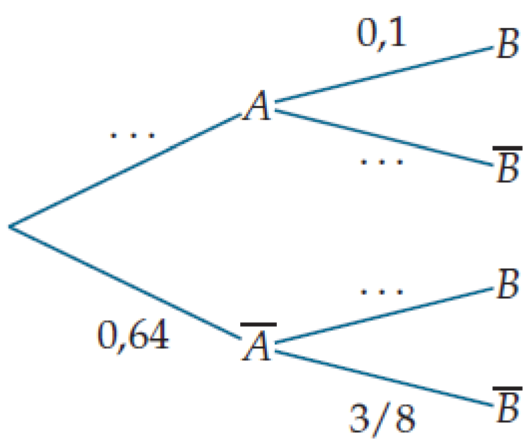
Aujourd'hui Nat' a décidé d'aller donner son sang. Ben hésite alors : « Je vais peut-être en profiter pour aller faire du vélo le long des bords de Seine ». On considère que la probabilité qu'il aille faire du vélo est 0,85.

Nat' ayant un petit volume sanguin, il est possible qu'on ne l'autorise pas à donner son sang (elle est « refusée » une fois sur cinq) auquel cas, si Ben est parti faire du vélo, il ne sera pas là quand elle rentrera.
Dans tous les autres cas, il sera là quand elle rentrera.

En admettant, que les évènements « Nat' n'est pas autorisée à donner son sang » et « Ben choisit d'aller faire du vélo » soient indépendants, quelle est la probabilité que Ben soit là quand Nat' rentrera ?

Exercice 11 : calculer les pondérations manquantes.

Calculer les pondérations manquantes dans l'arbre ci-dessous puis en déduire $P(B)$.



Exercice 12 : la répartition des appartements dans un immeuble.

Dans un immeuble, on donne la répartition des appartements suivant :

- que ce soit un studio ou non ;
- qu'il soit occupé par une seule personne ou bien par plusieurs personnes.

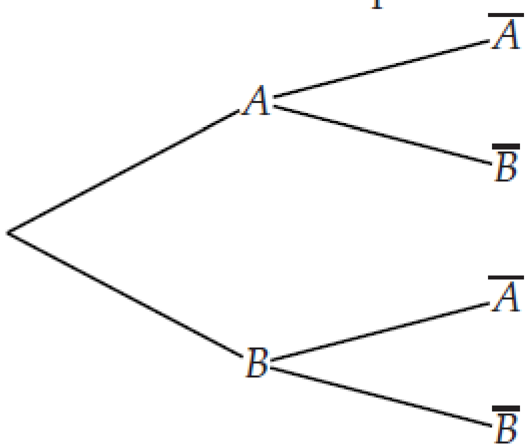
	Studio	Pas studio	Total
Seule	8		15
Plusieurs	2		7
Total	10	12	22

1) Déterminer les valeurs manquantes dans le tableau.
2) Quand on choisit un appartement au hasard dans l'immeuble, on appelle S l'évènement « l'appartement est un studio » et PL l'évènement « l'appartement est occupé par plusieurs personnes ».
   a) Calculer $P(S)$, $P_{\overline{S}}(PL)$ et $P_{PL}(S)$.
   b) Les évènements S et PL sont-ils indépendants ?

Exercice 13 : trouver l'erreur dans l'arbre de probabilité.

Dans cet exercice, A, B, C, D, E et H désignent des évènements quelconques d'un univers Ω.

1) Trouver l'erreur dans l'arbre de probabilité suivant :



Exercice 14 : se préparer à manger.

1) On considère deux évènements R et S tels que $P(R) = \frac{1}{4}$, $P_R(S) = \frac{5}{6}$ et $P_{\overline{R}}\left(\overline{S}\right) = \frac{11}{12}$.
Construire un arbre pondéré avec ces évènements R et S.

2) Tao ne sait pas s'il lui reste de quoi préparer à manger dans son réfrigérateur.
Il estime la probabilité que ce soit le cas à 0,8.
   - Dans ce cas (s'il a de quoi préparer à manger), il estime que la probabilité que le repas qu'il se préparera soit bon est de 0,65.
   - Sinon, il ira dans son restaurant favori dans lequel il estime que la probabilité que le repas servi soit bon est de 0,99.

   Construire un arbre pondéré représentant la situation après avoir explicité les notations des évènements apparaissant dans cet arbre.

Exercice 15 : une étude de deux événements.

On considère deux évènements A et B tels que $P(A) = 0{,}1$ et $P(A \cap B) = 0{,}06$. Calculer $P_A(B)$.

On considère deux évènements C et D tels que $P(D) = 0{,}6$ et $P(C \cap \overline{D}) = 0{,}35$. Calculer $P_{\overline{D}}(C)$.

On considère deux évènements disjoints E et F de probabilités non nulles. Calculer $P_E(F)$.

On considère deux évènements A et B tels que $P(A) = 0{,}37$, $P(B) = 0{,}68$ et $P(A \cup B) = 0{,}84$. Calculer :

1) $P_A(B)$
2) $P_B(A)$

On considère deux évènements A et B tels que $P(A) = 0{,}63$ et $P_A(B) = 0{,}06$. Calculer :

1) $P(A \cap B)$
2) $P\left(A \cap \overline{B}\right)$

On considère deux évènements E et F tels que $P(E) = \dfrac{1}{3}$ et $P_{\overline{E}}(F) = \dfrac{7}{12}$. Calculer :

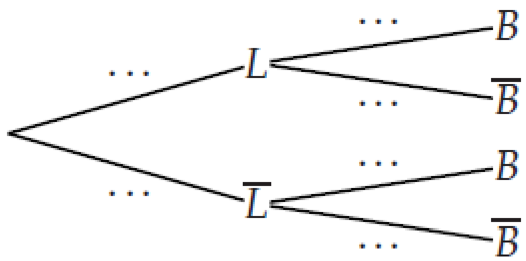
1) $P\left(\overline{E} \cap F\right)$
2) $P\left(\overline{E} \cap \overline{F}\right)$

Exercice 16 : interpréter une probabilité.

Après les contrôles de mathématiques, 60 % du temps, Issa dit « Je suis sûr que j'ai loupé ».
Ses amis sont pourtant formels : « Quand il dit ça, il a quand même 15 ou plus les 3/4 du temps. Et quand il ne dit rien, on peut être sûr à 95 % qu'il va avoir 15 ou plus. »
Après un devoir de mathématiques, on considère les évènements :

- L : « Issa dit qu'il a manqué le devoir » ;
- B : « Issa a 15 ou plus au devoir ».

1) Recopier et compléter l'arbre ci-dessous :



2) Calculer $P(L \cap B)$ et interpréter cette probabilité dans les termes de l'énoncé.
3) Calculer la probabilité qu'il ne dise rien et qu'il ait moins de 15.

Exercice 17 : logiciel de sélection aléatoire et probabilités.

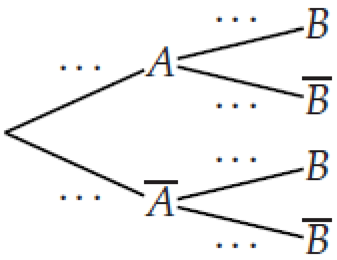
Dans une playlist, Naïm a mis 10 albums et réglé le lecteur en sélection aléatoire.
Le logiciel de sélection aléatoire choisit d'abord un album puis choisit une chanson dans cet album.
Quelle est la probabilité que la 1re chanson jouée soit la préférée de Naïm, qui se trouve dans un album de 12 titres ? On représentera la situation par un arbre.

Exercice 18 : probabilités et calculs sous forme de fractions irréductibles.

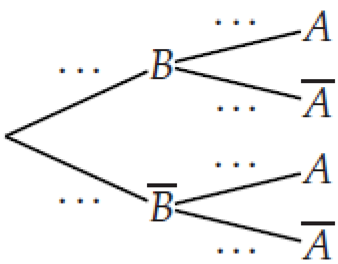
On considère deux évènements A et B et le tableau de probabilités ci-dessous :

	A	$\overline{A}$	Total
B	0,44		
$\overline{B}$		0,13	0,32
Total			1

1) Recopier et compléter ce tableau.
2) Lire $P(A)$, $P\left(\overline{B}\right)$, $P(A \cap B)$ et $P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right)$.
3) Calculer $P_A(B)$, $P_A\left(\overline{B}\right)$, $P_{\overline{A}}(B)$ et $P_{\overline{A}}\left(\overline{B}\right)$. On mettra les résultats sous forme de fractions irréductibles.
4) Recopier et compléter l'arbre ci-dessous :



5) De même, recopier et compléter :



Exercice 19 : deux événements A et B et leur contraire.

On considère deux évènements A et B tels que $P(A) = 0{,}8$ et $P(A \cap B) = 0{,}48$.

1) Montrer que $P\left(A \cap \overline{B}\right) = 0{,}32$.
2) Calculer $P_A\left(\overline{B}\right)$.

On considère deux évènements E et F tels que $P(E) = 0{,}4$ et $P\left(\overline{E} \cap \overline{F}\right) = 0{,}12$. Calculer $P_{\overline{E}}(F)$.

On considère deux évènements A et B tels que $P(A) = 0{,}45$; $P(B) = 0{,}6$ et $P(A \cup B) = 0{,}71$. Calculer :

1) $P_A(B)$ 2) $P_A\left(\overline{B}\right)$ 3) $P_{\overline{B}}(A)$ 4) $P_{\overline{B}}\left(\overline{A}\right)$

Exercice 20 : exprimer les pondérations comme une probabilité.

Dans l'arbre ci-dessous, exprimer chacune des pondérations comme une probabilité (par exemple $0{,}65 = P_A\left(\overline{B}\right)$).